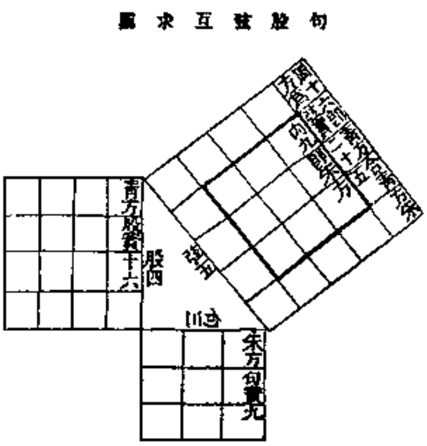
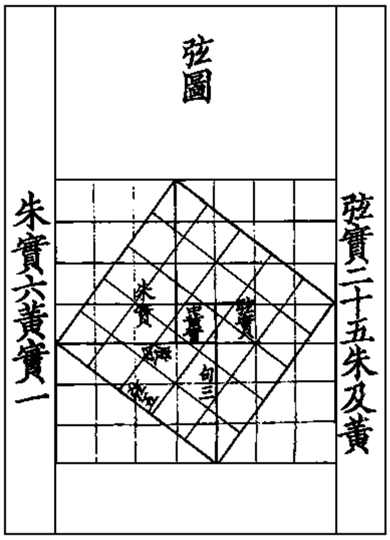
A bizonyítás fogalma
és a kínai matematika





Kutrovátz Gábor
(Tudomány-, Technika- és Mérnöktörténet PhD program, II. évfolyam)

Házidolgozat Dr. Várnai András “Tudománytörténet” címû kurzusához
2001. február

Ebben a dolgozatban annak a problémának szeretnék röviden utánajárni, hogy mennyire tekinthető jogosnak a "bizonyítás" fogalmának alkalmazása tradicionális kínai matematikai szövegekkel kapcsolatban. Szerény eszközeimmel amellett kívánok érvelni, hogy a kérdéses fogalom használata történeti szempontból jogtalan, hiszen (i) a modern nyugati matematika egy normatív fogalmáról van szó, (ii) amelynek konceptuális gyökerei a görög matematika egy speciális (és később ugyancsak normatívvá vált) elméletéig, az eukleidészi felfogásig nyúlnak vissza, ám ez a felfogás (iii) egyfelől nem általánosítható korlátlanul a nyugati matematika történetére, (iv) másfelől pedig kognitíve idegen a hagyományos kínai matematika szellemétől. Úgy vélem, hogy amikor a bizonyítás fogalmának a kínai matematikára való alkalmazhatóságát tagadom, akkor ezzel nem egy eurocentrikus vagy kultúrsoviniszta elfogultságról teszek tanúbizonyságot, hanem éppen ellenkezőleg, az eurocentrikus tudománytörténeti "szemüveg" használatával szembeni szkepszisemnek adok hangot.

1. A bizonyítás helye az európai matematikai tradícióban

A bizonyítás modern fogalma

A 19. sz. végén - 20. század elején kialakult általános felfogás szerint a matematika bizonyító jellegű tudomány, méghozzá olyannyira, hogy ha vannak más bizonyító tudományok is (pl. a természettudományok), akkor azok csak annyiban bizonyító jellegűek, amennyiben meg tudják közelíteni a modern matematika által diktált formai ideált. Ez a bizonyító jellegért felelős formai ideál az axiomatikus-deduktív struktúra, amely a következő kívánalmakat támasztja egy tudományos elmélettel szemben: (1) Az elmélet kijelentő mondatoknak egy halmaza, amely mondatok egy logikailag korrekt és áttekinthető nyelven vannak megfogalmazva (vagy egy ilyen nyelvre átültethetők). (2) Az elmélet bizonyos mondatait alapállításokként ("axiómákként") elkülönítettük. (3) Az elmélet minden más mondatát úgy "igazoljuk" (vagyis csatoljuk az elmélethez), hogy megmutatjuk, miszerint bizonyos logikai szabályok ("levezetési szabályok") sorozatos alkalmazásával a kérdéses állítás visszavezethető az axiómákra. Szűkebb értelemben véve ez az utolsó követelmény az, amellyel kapcsolatban a bizonyítás fogalmát alkalmazni szokás: bizonyítani annyi, mint megmutatni, hogyan következik egy kijelentés logikailag a kitüntetett alapállításokból.

A bizonyítás eme "szigorú" fogalma a matematika 19. századi fejlődésének eredménye. Ez a fogalom, elválaszthatatlan egységben a matematika axiomatikus-deduktív ideáljával, az absztrakt matematika és a modern szimbolikus logika látványos nászának szülötte, és mint ilyen egy sor matematikatörténeti eseménnyel-folyamattal-tendenciával áll kapcsolatban. Ezek vizsgálata azonban meghaladja a dolgozat kereteit, és ez a kibontatlan utalás csupán azt a célt szolgálja, hogy felhívja a figyelmet a (sokszor feledésbe merülő) tényre: a matematika állítólagos "bizonyító" jellege egy körülbelül száz éve uralkodó felfogás megnyilvánulása, és amennyiben a matematikatörténet korábbi epizódjait is "matematikai" tevékenységnek kívánjuk tekinteni, fel kell adnunk a matematikára mint *ab ovo* bizonyító tudományra vonatkozó történetietlen elképzeléseinket.

E konklúziónak szembe kell néznie egy triviálisan adódó ellenvetéssel: azzal, hogy mind a "bizonyítás" fogalma, mind az axiomatikus-deduktív matematikai ideál egy legalább 2300 éves történetre tekint vissza, amely történet (explicit módon) Eukleidész *Elemek* című művével vette kezdetét. A következőekben röviden azt mutatjuk be, hogy mennyiben tér el az eukleidészi szerkezet a mai axiomatikus struktúráktól, majd azt vázoljuk, hogy milyen szerepet tölt be ez az ősi "modell" a nyugati tudomány történetében.

A matematika eukleidészi rendszere

Az i.e. 300 körül Eukleidész által összeállított matematikai "korpusz" az *Elemek* címet viseli, és egy egységes konceptuális és módszertani keretbe formálva tartalmazza a korabeli görög civilizáció legfontosabb matematikai ismereteit. Maga az axiomatikus-deduktív jelleg feltehetőleg nem Eukleidész találmánya, hanem egy akkoriban kibontakozóban lévő matematikai stílus, amely néhány – azóta elveszett – szintén *Elemek* című értekezésen keresztül alakult ki az i.e. 5-4. század során. A mű az Arisztotelész által ismertetett tudományképet tükrözi: állításait bizonyos alaptételekből "bizonyítja". Minthogy az eukleidészi elméletet nem áll módomban itt részletesen ismertetni, a következőekben csupán néhány olyan sajátosságára szeretném felhívni a figyelmet, amelyek fontos különbséget teremtenek az antik matematika speciális elmélete és a modern axiomatikus tudományideál között:

1. A klasszikus görög matematika művelése teljes egészében szöveges keretek között folyt, vagyis a formális megfogalmazás a görög matematikusok számára idegen. Bár megfigyelhető az a szándék (pl. éppen a "definíciókon" keresztül), hogy minél egyértelműbb matematikai szaknyelvezet alakuljon ki, összességében ez a kvázi-hétköznapi nyelv nem alkalmas arra, hogy logikailag kifogástalanul áttekinthető szerkezetek közegévé váljon, vagyis hogy elkülöníthetők legyenek benne a tisztán formális, logikai aspektusok.

2. Míg a modern tudományideálban az "elmélet" kijelentéseknek (vagyis axiómáknak és bizonyított tételeknek) egy gyűjteménye, addig Eukleidész matematikájában a tételek helyén gyakran szerkesztési problémák és feladatok szerepelnek. Ezek a felszólító módban megfogalmazott problémák azonban logikai értelemben nem "bizonyíthatók" a kijelentő módú axiómákból, és a feladat utáni szövegrész valójában inkább a megoldást tartalmazza, mintsem valamiféle "bizonyítást" – ám a mű alapszerkezetét tekintve úgy tűnik, hogy a görögök ezeknek a "megoldásoknak" ugyanolyan státuszt tulajdonítottak, mint a tételek "bizonyításainak"!

3. Míg Arisztotelész pontosan meghatározza azt a logikai elméletet, amely a bizonyítások közegéül szolgál, mielőtt kifejtené az axiomatikus-deduktív tudományideálra vonatkozó elképzeléseit, addig az *Elemek* esetén semmiféle hasonló logikai háttérelmélet nem áll rendelkezésre! Ha viszont (az előző pontok alapján is) az *Elemek*ben éppen a logikai oldal gyengesége (vagy explicit hiánya) az, ami aláássa az antik és a modern matematikai stílus között vonható párhuzamot, akkor elmondható, hogy az eukleidészi matematikából leginkább pont a bizonyítás fogalmának világos és tudatosított használata hiányzik, legalábbis az analógia szemszögéből tekintve.

A következőekben arra szeretnék választ kapni, hogy igazolja-e a modern és az eukleidészi matematikai stílus közti analógiát az őket elválasztó történeti korszakok matematikájának fejlődési útvonala.

Eukleidész hagyatéka a modern matematika számára

Az eukleidészi matematikai stílus néhány évszázadon keresztül virágzott hellenisztikus kultúrában, aztán fokozatosan bomlásnak indult. A késő-antik matematika legnagyobb eredményei vagy az eukleidészi szigor zárójelezésének (Hérón), vagy egyenesen más matematikai stílus követésének (Diophantosz) köszönhették születésüket. A görög matematikát átvevő (és számunkra átörökítő) arab és iszlám tudósok egyenesen értetlenül álltak az *Elemek* mentalitása előtt, és bár a fordításokban megőrizték annak szerkezetét, önálló matematikai munkáikban szinte meg sem próbálták követni az eukleidészi stílust. Az antik tudományt felelevenítő skolasztikus tudósok sem jeleskedtek az *Elemek* által képviselt matematika-felfogás átvételében. Bár természetesen ezt a művet is tanulmányozták, gyakorlatilag teljesen képtelenek voltak bekapcsolódni az Eukleidész neve által fémjelzett "kutatási programba", és a matematika mostoha bánásmódban részesült a többi neves antik tudományhoz képest.

Köztudott, hogy a 17. század során az *Elemek* egyfajta metodológiai mintaképpé vált a filozófia (Hobbes, Spinoza), vagy akár a "természetfilozófia" (Newton) számára. A tudás újfajta, nem teológiai jellegű megalapozását kutató gondolkodóknak kapóra jött az az antik elmélet, amelyik szintén egy, az ismeretek közti biztos összefüggésrendszernek kívánt alapot teremteni. A matematikai "bizonyítás" az igazolásnak egy intuitíve kényszerítő erejű, kétségbevonhatatlan formáját kínálta, és ezért gyakran a filozófiai érvelés kánonjaként szolgált. Fel kell azonban hívni a figyelmet arra, hogy ez az "intuitív" bizonyosság (amelyet pontosan visszaad a *demonstratio* fogalmának eredeti jelentése) éppen az újfajta filozófiai rendszerek igazolásának feladatát volt hivatott ellátni, a (szintén gyors fejlődésnek induló) matematika viszont egyáltalán nem követte ezt a módszertani ideált! "Intuitív" (szemléleti) bizonyosságról leginkább a geometriai elméletek esetében lehet szó (részben talán ezért reprezentálták a görögök algebrai ismereteiket is geometriai formában), márpedig az újkori matematikát az algebraizálódás átfogó folyamata jellemezte. A 17. és a 18. század matematikai elméletei így a lehető legtávolabb álltak az axiomatikus-deduktív formától, és a bizonyítás igénye sem jellemezte ezt a kort. A néhány kételkedő hangot elnyomta az alkalmazásbeli sikerekből származó eufória: "*Allez en avant et la foi vois viendra*".

A logikai szigor iránti igény a 19. század során fokozatosan (újra) megjelent a matematikában, és ennek eredményeképpen született meg többek között az ún. Hilbert-program, valamint ezzel együtt a matematika formális-axiomatikus "paradigmája". Ez a program azonban puszta (interpretálatlan) szintaktikai kalkulusoknak tekinti a matematikai elméleteket, melyekben az axiómák teljesen tetszőleges (nem pedig "intuitíve bizonyos", vagy akár jelentésteljes) állítások, ezért a "bizonyítás" (mint *demonstratio*) fogalma teljesen elvesztette eredeti jelentését. A mai matematika azon felfogása, mely szerint itt egy lényegileg "bizonyító" jellegű diszciplínáról van szó, valójában csak annyit jelent, hogy minden "tétel" előállítható megadott kiindulóformulákból legitim szintaktikai átalakítások segítségével, ennek pedig semmi köze sincs az eukleidészi típusú intuitív igazoláshoz.

Az első rész lezárásaképpen a következő konklúziót szeretném megfogalmazni: ha a "matematika *mint* bizonyító tudomány" normáját történetileg próbáljuk értelmezni, akkor vagy ki kell zárnunk a matematika történetéből a korábban oda sorolt epizódok többségét, vagy pedig a hagyományos értelemben vett bizonyítás (vagyis mint ismeret-igazolás) műveletének alapvető szerepét el kell vitatnunk napjaink matematikájától.

2. Van-e helye a bizonyításnak a kínai matematikai tradícióban?

A dolgozat hátralevő részében a következő kérdést szeretném megvizsgálni az eddigi tanulságok figyelembevételével: bizonyító jellegű-e (akár implicit formában is) a tradicionális kínai matematika? Először azáltal, hogy felvázolom a kínai matematika fejlődésének egy alapvető, az *Elemek*kel rokonítható fejleményét, negatív választ fogok adni a kérdésre. Ezután egy konkrét esettanulmányon alapuló pozitív válaszkísérletet fogok majd bírálni, majd végül megkísérelem levonni az általános tanulságokat.

A kínai matematika "*Elemek*je": A *Kilenc fejezet a matematikáról*

A kínai matematika fejlődését sokáig leginkább a *Kilenc fejezet a matematikáról* című, valamikor az i.e. 1. sz. környékén összeállított munka szabta meg. Ez a mű sok tekintetben párhuzamba állítható Eukleidész *Elemek*jével, de persze számos eltérés is kimutatható közöttük. Mindkét mű korábbi fejleményeket foglal össze, és ezáltal széles körű ismeretanyagot tesz hozzáférhetővé az olvasó számára. Mi több, mindkét munka az adott civilizáció első nagyszabású matematikai összefoglalását nyújtja, így mindketten hosszú időre alapul szolgáltak a további matematikai kutatásoknak.

Az egyik (és talán a legfontosabb) eltérés rögtön a képviselt matematikai stílust érinti: a *Kilenc fejezet*ben nyoma sincs az *Elemek* axiomatikus-deduktív módszerének. A *Kilenc fejezet* ezért az ún. *empirikus* vagy *praktikus* matematikai stílust követi, vagyis ismereteit nem választja le teoretikusan vagy akár episztémikusan azok alkalmazhatóságáról. Ez a megállapítás talán mentesíthető minden degradáló felhangtól, ha észrevesszük, hogy ez az empirikus vagy praktikus jelleg elmondható gyakorlatilag a történelem minden korának és kultúrájának matematikájáról, éppen csak az eukleidészi elmélet és a modern matematikai elméletek kivételével. Ám amennyiben a két említett munka meghatározó szerepet játszott az adott kultúrák matematikai ideáljának fejlődésében, úgy ez az eltérés azonnal lényegessé válik.

Egy második különbség a matematika elsődleges tárgyában mutatkozik: míg az *Elemek* esetén a könyvek többsége geometriáról szól, és az aritmetikai-algebrai témájú fejtegetések is leginkább geometriai interpretációban kerülnek tárgyalásra, addig a *Kilenc fejezet* a praktikus matematikai igényeknek inkább megfelelő algebrai formát követi. Geometria főként az első, a negyedik és a kilencedik fejezetekben jelenik meg, ám itt is általában azzal a céllal, hogy mintegy "gyakorlóterepül" szolgáljon algebrai átalakítások és problémakezelések számára. (A geometria ugyanilyen szerepével találkozunk az ókori Mezopotámia matematikai kultúrájában.) Ez a tematikus hangsúlykülönbség érinti a bizonyításra vonatkozó kérdésünket is: úgy tűnik, hogy a bizonyítás kezdetben specifikusan a geometriához kötődik, hiszen a "szemléleti igazolás", a *demonstratio* itt kínálja fel magát. (Lásd a görögöknél: Thalész, az első "bizonyító", valamint a i.e. 5. sz. szerkesztési problémáinak szerepét.)

Egy harmadik különbség az általános módszertanra vonatkozik. Egyrészt meg kell jegyeznünk, hogy míg Eukleidész számára az axiomatikus-deduktív jelleg a módszertani egységet is hivatott biztosítani, addig a *Kilenc fejezet* összeállítója (akinek a személye vitatott) láthatólag nem törekedett egységes módszertani arculatra, és a “fejezeteket” elsősorban a problémák tematikus rokonsága alapján válogatta össze. Másrészt mégis körvonalazható egy tág értelemben vett “módszertan” a *Kilenc fejezet* esetén is, talán éppen a szembeállításból kifolyólag: ez a mű főként problémamegoldási rutinokat, algoritmusokat keres, miközben sokszor nem specifikálja a feladatokat annyira, hogy ne hagyjon helyet a kreativitásnak. Megoldásai nem konkrét, logikailag teljesen zárt érvelések, hanem heurisztikus és intuitív elemekre nagyban támaszkodó ötlet-kifejtések. A matematika praktikus jellegéből adódik az is, hogy – szemben az *Elemek* szigorú egzaktságával – a *Kilenc fejezet* számos feladata közelítő eljárásokat fejt ki és mozgósít, pl. a π értékének számításainál, mely igen népszerű probléma volt a kínai matematikusok számára.

Mindennek fényében fontos kiemelni, hogy nem állíthatjuk, hogy a *Kilenc fejezet* alacsonyabb matematikai színvonalat képviselne, mint az *Elemek*, hiszen jónéhány (aritmetikai-algebrai jellegű) területen (lásd pl. negatív számok, egyenletek és egyenletrendszerek, közelítő megoldások) túlszárnyalja görög társát, hanem inkább azt a következtetést célszerű levonnunk, hogy a két mű alapvetően eltérő matematikai stílust követ.

“Bizonyítások” a tradicionális kínai matematikában

Ha ezidáig főként a különbségeket hangsúlyoztuk a két mű között, akkor most fordítsuk a figyelmünket egy lényeges hasonlóságra, amelyik közvetlenül érinti a bizonyítás problematikáját. Ugyanúgy, ahogy az *Elemek*ben minden tétel (vagy probléma) után szerepel a bizonyítás (vagy a megoldás), a *Kilenc fejezet*ben is követi a feladatokat a megoldás, valamint annak indoklása is. Ez az indoklás természetesen formailag emlékeztet az *Elemek*ben megszokott bizonyításra, azonban lényeges különbségek is adódnak: míg az *Elemek*ben semmi sem szerepelhet anélkül, hogy korábbi eredményekre vagy egyenesen a kiinduló állításokra vissza ne lenne vezetve, addig a *Kilenc fejezet* “indoklásai” gyakran hivatkoznak “közismert” vagy “nyilvánvaló” szabályokra, eljárásokra. Ezek a hivatkozások meghiúsítanak minden arra irányuló kísérletet, hogy e művet logikailag zárt munkaként rekonstruáljuk.

A legkönnyebben akkor láthatjuk bele a görög bizonyítás-koncepciót a *Kilenc fejezet* feladatainak ismertetésébe, amikor geometriai tárgyú érvelésekkel találkozunk. Úgy tűnik azonban, hogy a szemléleti evidencia további analízisének, explikálásának igénye, ami talán oly egyedülállóvá teszi Eukleidész művét (és ami, ahogy a 20. századra láthattuk, csak a szemléletről történő teljes – és paradoxikus – lemondással érhető el), egyáltalán nem érhető tetten a kínai műben. Jó példával szolgálnak erre azok a “bizonyítások”, melyeket a *Kilenc fejezet* (nem sokkal későbbi) kommentátorai fűztek bizonyos geometriai összefüggésékhez. A 2-3. sz. során született meg pl. a “Püthagórasz-tétel” első kínai “bizonyítása”: az ábra mellé (amelyről egyébként csak a 3-4-5 oldalú háromszög összefüggése olvasható le) a következő magyarázatot fűzte a kommentátor: “Lásd.” (Megjegyzésre érdemes, hogy az első komolyabb indiai matematikai művekben pontosan ilyen jellegű “magyarázó” ábrák találhatók, azzal a különbséggel, hogy ezek a szerzők már ismeretségben voltak az *Elemek*kel – ám vitathatatlanul hidegen hagyta őket annak bizonyító “szelleme”.) Azt sem szabad szem elől tévesztenünk, hogy amikor egy geometriai ábra szerepel a *Kilenc fejezet* “indoklásaiban”, akkor annak funkciója általában egy algebrai összefüggés szemléltetésében merül ki (csakúgy, mint a püthagóreusok “geometrizált algebrájában”), ez a szerep pedig távol áll az általános érvényű, logikailag kényszerítő erejű bizonyítástól.

Fontos hangsúlyozni, hogy mindebből nem azt a következtetést szeretném levonni, hogy a kínai “indoklásoknak” alapvetően más *szándéka* lett volna, mint Eukleidész bizonyításainak. Mindkét esetben azzal a céllal született a gondolatmenet, hogy érveljen a megoldás helyessége (vagy a tétel igazsága) mellett, vagyis hogy alátámassza a közölt ismeretet. Ennyiben azonban közösnek tekinthetők minden filozófiai érveléssel, minden argumentatív magyarázattal, vonatkozzon az akár a természeti jelenségekre, akár a társadalom “helyes” felépítésére, akár egy matematikai módszer alkalmazására. Ami viszont egyedülállóvá teszi az *Elemek* bizonyításait, és szembeállítja azt akár a *Kilenc fejezettel* is, az az axiomatikus-deduktív “alapélmény” felbukkanása és uralomra jutása a klasszikus görög tudomány matematikájában – ennek pedig én semmi nyomát nem látom a hagyományos kínai matematikában.

“A matematikai bizonyítás nemzetközi története” egy kínai esettanulmány alapján?

Végül egy “bizonyítás-jelölt” és a vele kapcsolatban felhozott érvek vizsgálatára szeretnék sort keríteni. *Karine Chemla* írása a *Science in Context* egyik 1997-es számában azt a tézis próbálja alátámasztani, hogy azáltal, hogy megkülönböztetjük a bizonyítás$_1$ normatív fogalmát a bizonyítás$_2$ deskriptív fogalmától, visszahelyezhetjük a korábban diszkvalifikált kínai bizonyításokat saját jogukba: erre példa a *Kilenc fejezet* egy törtek összeadására vonatkozó 3. sz-i magyarázata. Ehhez azonban észre kell vennünk, érvel Chemla, hogy a kínai szövegeknek kétféle párhuzamos olvasatot kell tulajdonítanunk: egyfelől egy diszkurzív, másfelől egy “intertextuális”, összefüggésekre kiélezett olvasatot. E második, rejtettebb olvasat a felszínre hozza a bizonyítás$_2$ valódi szerepét, amelynek megfelelően egy “meglehetősen bonyolult filozófiai állítás” megfogalmazásához jutunk, mely szerint a matematikai feladatok ugyanazzal a funkcióval bírtak a korabeli kínai kultúrában, mint más szövegek is: transzformációkat juttattak érvényre különböző ontológiai entitások/kategóriák között. A szerző szerint esettanulmánya feljogosít bennünket arra, hogy felvázoljuk “a matematikai bizonyítás nemzetközi történetére” vonatkozó kutatási programot.

Anélkül, hogy belemennék a konkrét forrás elemzésébe (melynek akadályát képezi a kínai nyelv ismeretének hiánya), néhány általános ellenvetéssel szeretném szembesíteni a fenti gondolatmenetet. Először is: a korábbi fejtegetések fényében nem látom jogosultnak a “bizonyítás” két értelme közti megkülönböztetést. Chemla szerint bizonyítás$_2$-nek lehet tekinteni a matematikusok tevékenységét és annak eredményeit, függetlenül attól, hogy azok megfelelnek-e a bizonyítás$_1$ normatív feltételeinek (vagyis egy “szuprahistorikus” normarendszer szerinti igazolás kritériumának). Ha jól látom, eszerint bizonyítás$_3$-nak lehetne nevezni egy pizza elkészítésének folyamatát is, függetlenül attól, hogy annak bármi köze van-e a bizonyítás két korábbi fogalmához. Ha csak azért (tágabb értelemben vett) bizonyításnak tekintünk minden matematikai tevékenységet, mert a mai matematikusok (! – erre Chelma is így hivatkozik) bizonyításnak tekintik saját tevékenységüket és annak produktumait, akkor beleestünk abba a hibába, hogy eleve feltételezzük azt, amit – a cikk későbbi gondolatmenete alapján – “bizonyítani” szeretnénk.

Egy másik ellenvetésem a szöveg kétféle olvasatán alapuló érv ellen irányul. Úgy vélem, az a maxima, hogy egy szöveg olvasásánál a lokális (diszkurzív) kontextus mellett a globális kontextust is figyelembe kell vennünk, az *Elemek* esetén legalább annyira jogosnak bizonyul, mint a *Kilenc fejezet* adott kommentárjánál. Ahhoz ugyanis, hogy érthessük Eukleidész gondolatmeneteit, folyton fel kell idéznünk azt, hogy milyen jelentést rögzítettek a definíciók egy adott terminushoz, vagy hogy milyen tulajdonságokat kötnek ki a posztulátumok, illetve azt is, hogy milyen megállapításokra juthattunk a korábbi tételek során. A matematikai szövegek ebben az értelemben a lehető legkevésbé sem diszkurzívak, és úgy látom, hogy ez a jellegzetesség valószínűleg nem jobban sajátja a *Kilenc fejezet*nek, mint az *Elemek*nek (sőt, ha ez a tulajdonság a zárt logikai struktúrával vagy annak implicit igényével áll kapcsolatban, mint ahogy sejtem, akkor a kínai szöveg ebben is elmarad a göröghöz képest).

Végül néhány megjegyzés a "transzformációkra" vonatkozó filozófiai konklúzióhoz. Egyfelől gyanúsnak érzem a "transzformáció" kifejezés használatát az adott kontextusban, ugyanis a matematika és a transzformációk intim kapcsolatát állító nézet ugyancsak erősen modern, leginkább talán Félix Klein nevéhez köthető, és ezen konnotációja miatt veszélyes lehet ezt a kifejezést matematikai szövegekre más értelemben alkalmazni. Másfelől, és ez a komolyabb probléma, itt sem látom azt, hogy a szöveg állított jellegzetessége ne lenne érvényes a görög matematikára is. (Azt az érvet, mely szerint ez a transzformációk iránti érzékenység a *Kilenc fejezet* esetén filozófiai kapcsolatban állna a *Változások könyvé*nek befolyásával, egyrészt e téren tanúsított tudatlanságom miatt nem vizsgálom, másrészt pedig azért nem, mert a szerző sem használja ki ennél a megjegyzésnél részletesebben.) Azt, hogy az eukleidészi matematika milyen alapvető kapcsolatban áll a püthagóreus vagy az eleai filozófiai tanokkal, számos tanulmányban vizsgálták, arra pedig, hogy milyen szerepet töltött be a matematika (és jónéhány bizonyítás) Platón vagy Arisztotelész filozófiai érveiben, valószínűleg szükségtelen kitérni.

Összességében úgy látom, hogy Chelma egyrészt nem mutatta meg, miért lenne jogos a "bizonyítás" (e tág) fogalmát alkalmazunk a kérdéses passzusra, másrészt nem alapozta meg kellőképpen nagyívű filozófiai következtetéseit.

"Bizonyítás" a kínai matematika későbbi korszakaiban

Ebben a rövid szakaszban arról szeretnék igen tömören szólni, hogy milyen kapcsolatban állt a kínai matematika a "bizonyítás" (európai) fogalmával fejlődésének későbbi periódusaiban.

Az eddig tárgyalt időszak mellett a másik igen "aktív" periódust a 13-14. sz. környékén, a Szung-dinasztia uralma idején mutatta a kínai matematika. Ebben az időszakban a szerzők a korábbinál nagyobb hangsúlyt fektettek az "igazolásra", a "bizonyításra". Módszereiket, szabályaikat (a kínai matematika általános érdeklődésének megfelelően) általában algebrai gondolatmenetekkel igazolták. Bár ezek az érvek sok esetben közel állnak a mi (hagyományos) bizonyítás-fogalmunkhoz, ez a hasonlóság nem véletlen: a jelek arra mutatnak, hogy ezidőtájt a kínai matematikusok (talán többszörös közvetítéssel) megismerkedtek az *Elemek* bizonyos részeivel, csakúgy, mint az ugyanebben az időben Európában történt. És elmondható, hogy ez az ismeretség – csakúgy, mint Európában – nem eredményezett szorosabb barátságot, és kimerült néhány udvarias próbálkozás szintjén.

A bizonyító-jelleg a 17. sz. után honosodott meg a kínai matematikában, amikor elkészült az *Elemek* (először az első hat könyvének) fordítása. Annak illusztrálására, hogy milyen idegen volt a tradicionális kínai matematikai terminológiától a “bizonyítás” fogalma, éppen e fordításból meríthetünk érvet. A “bizonyítást” a “*lun*” terminussal adták vissza, amely egy sor különböző kontextusban rendelkezett jelentéssel (pl. “vita”, “ítélet”, “kutatás”, “következtetés”). Úgy tűnik, hogy egy ilyen “laza”, “rugalmas” terminus használata világos célt szolgált: egyértelműen meg akarták különböztetni az *Elemek* bizonyítás-fogalmát a hagyományosan valamennyire hasonló értelmű fogalmaktól (“*zheng*”, “*bian*”), hogy ezzel is leszögezzék: egészében véve itt egy teljesen új fogalom bevezetéséről van szó.

Összefoglalás

Végezetül szeretném összefoglalni az álláspontomat. Az a nézet, hogy a matematika lényegileg bizonyító jellegű tudomány volna, szinte kizárólag a 20. század matematikai stílusára jellemző, és egy formalista-logicista alapú matematikafelfogásból fakad. Ez a felfogás metodológiai ideálját az eukleidészi matematikai felépítésből merítette, ám a hasonlóság csupán formális: a modern formalista matematika elárulta az eukleidészi programot azáltal, hogy teljesen lemondott a “bizonyítás” ismeret-igazolásként való elgondolásáról, és a matematikai bizonyítás fogalmát a logikai levezetés szinonimájaként való feltüntetésével a lehető legtávolabb vitte a szó eredeti, hagyományos, hétköznapi értelmétől. Sem az *Elemek* (történetileg elszigetelt) axiomatikus-deduktív alapélménye, sem a modern matematika formálisan “bizonyító” jellege nem lelhető fel a matematika története által vizsgált egyéb korszakokban vagy kultúrákban, és “bizonyító”-jellegűnek látni bármely más matematikai tevékenységet (csak azért, mert érvek és igazolási kísérletek találhatók benne) egy olyan elfogultságnak az eredménye, amely a mai matematika mintájára, mintegy annak “kibomlatlan csírájaként” szeretné látni a korábbi korok matematikáját. Ennek az elfogultságnak egy példájával találkozhatunk a hagyományos kínai matematika néhány látszólag “rehabilitációs szándékú”, ám valójában nem csereszabatos szellemi javakkal “jótékonykodó” elemzésében.

Felhasznált irodalom:

Boyer, C.B. - Merzbach, U.C.1968: *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons.

Chemla, K. 1997: “What is at Stake in Mathematical Proofs form Third-Century China?” *Science in Context* **10.** 2, pp. 227-251.

Engelfriet, P.M. 1996: *Euclid in China : The Genesis of the First Chinese Translation of Euclid's Elements, Books I-VI (Jihe Yuanben, Beijing, 1607) and Its Reception Up To)*. Leiden.

Juskevics, A.P. 1982: *A középkori matematika története*. Budapest, Gondolat.

Kline, M. 1972: *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times*. Oxford UP.

Neugebauer, O. 1984: *Egzakt tudományok az ókorban*. Budapest, Gondolat.

Sain M. 1986: *Nincs királyi út!* Budapest, Gondolat.

Szabó Á. 1978: *A görög matematika kibontakozása*. Budapest, Magvető.

van der Waerden, B.L. 1977: *Egy tudomány ébredése*. Budapest, Gondolat.