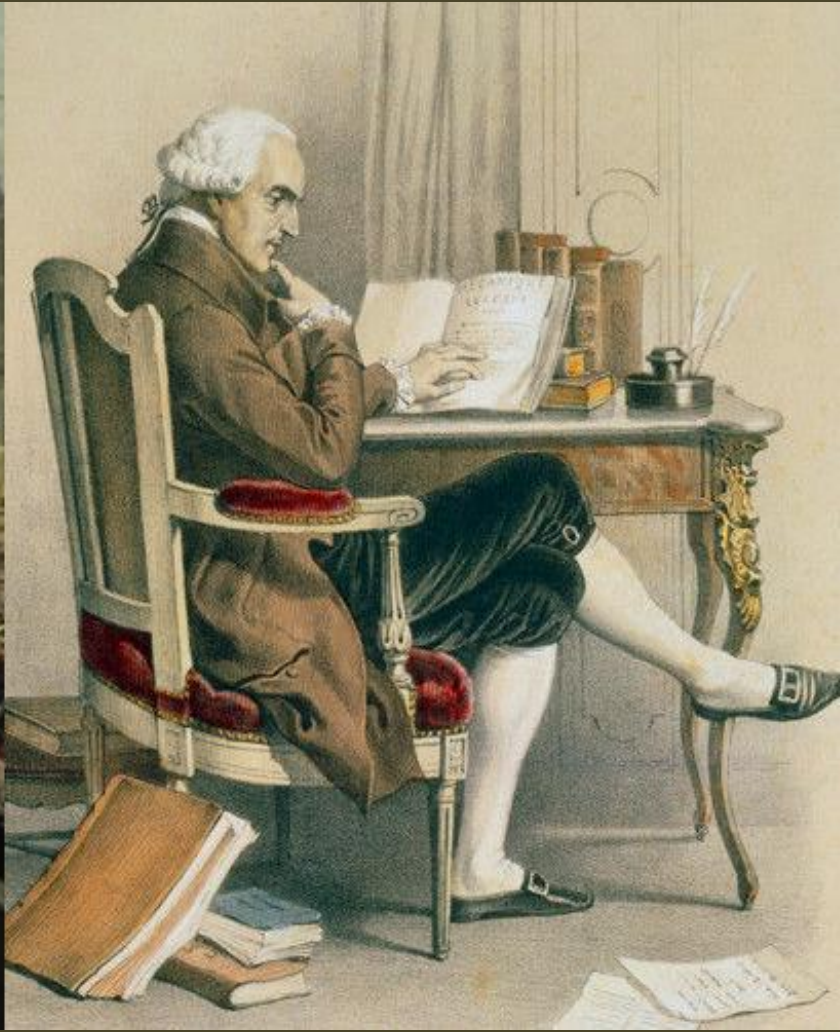
Égi mechanika a 18. században



A csillagászat története 2., 2015. március 27.

A **Felvilágosodás** kora

- növekvő népesség, élettartam, „GDP”, stb.
- elterjedő írásbeliség, műveltség és közoktatás

Számunkra releváns:

- 1701: Porosz Királyság létrejön
- 1703–21: az Orosz Birodalom alapítása
- 1756–63: Hétéves háború
- 1789: Bastille ostroma – Francia forradalom
- 1799: Napóleon átveszi a hatalmat

I. Frigyes
(ur. 1701-13)

II. (Nagy) Frigyes
(ur. 1740-86)

I. (Nagy) Péter
(ur. 1682-1725)

II. (Nagy) Katalin
(ur. 1762-96)

Berlini Tudományos
Akadémia (1700)

Szentpétervári T. A.
(1724)

XV. Lajos
(ur. 1715-74)

Bonaparte
Napóleon

A felvilágosodás fogalma

„A felvilágosodás az ember kilábalása maga okozta kiskorúságából. Kiskorúság az arra való képtelenség, hogy valaki mások vezetése nélkül gondolkodjék. Magunk okozta ez a kiskorúság, ha oka nem értelmünk fogyatékosságában, hanem az abbeli elhatározás és bátorság hiányában van, hogy mások vezetése nélkül éljünk vele. *Sapere aude!* Merj a magad értelmére támaszkodni! – ez tehát a felvilágosodás jelmondata."

Immanuel Kant
(1724-1804)

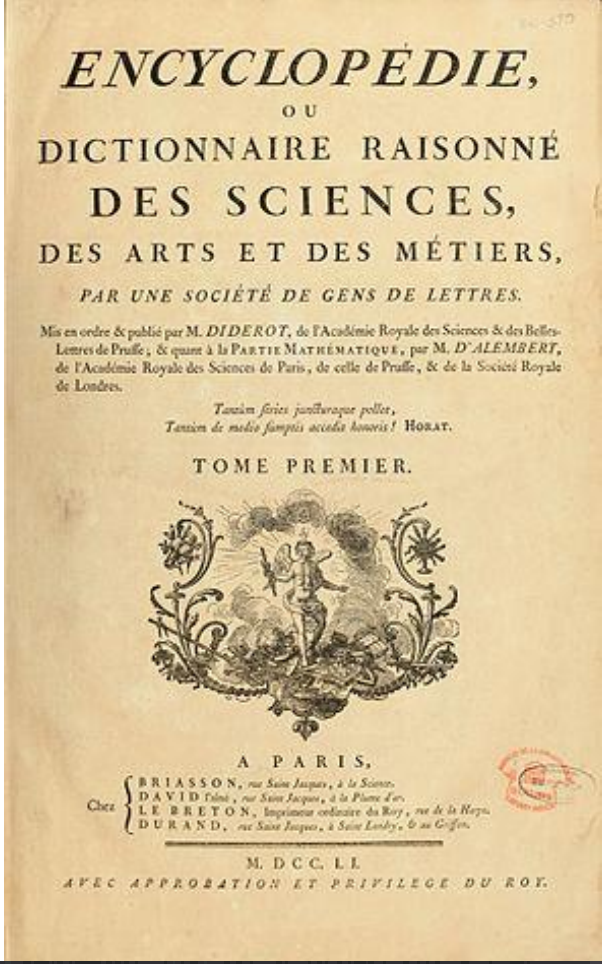
⇒ hit az észben és a tudásban:
az ember boldogságának és felemelkedésének eszköze

A Francia Enciklopédia

Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers
(Enciklopédia, vagy a tudományok, művészetek és mesterségek rendszeres szótára)

- Megjelenés: 1751-80
- Kötetek száma: 28 + 5 + 2 névmutató
- Példányszám: 4000 (ez akkor rengeteg)
- 142 nevesített munkatárs, kétszer annyi névtelen
- Legfontosabb szerzők (cikkszám szerint):

- 17288 – Chevalier Louis de Jaucourt
- 5394 – Denis Diderot
- 4268 – Boucher d'Argis
- 1925 – Edme-François Mallet
- 1309 – Jean le Rond d'Alembert
- 994 – Jacques-Nicolas Bellin
- 720 – Guillaume Le Blond
- 707 – Gabriel-François Venel
- 693 – Pierre Daubenton
- 541 – Antoine-Joseph Desallier d'Argenville
- 482 – Jacques-François Blondel
- 449 – Antoine Louis
- 428 – Marc-Antoine Eidous
- 414 – Holbach báró
- 388 – François-Vincent Toussaint
- 344 – Jean-Jacques Rousseau
- 337 – Pierre Tarin
- 227 – Claude Bourgelat
- 214 – Jean-Baptiste de La Chapelle
- 199 – Urbain de Vandenesse
- 192 – Arnulphe d'Aumont
- 129 – César Chesneau Du Marsais
- 119 Cahusac
- 108 Le Roy


ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.
Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.
Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez BRIASSON, rue Saint Jacques, à la Science.
DAVID l'aîné, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe.
DURAND, rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.
M. DCC. LI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Az Enciklopédia célkitűzése

„a célja, hogy összegyűjtse a föld színén szétszórt ismereteket, feltárja ez ismeretek általános rendszerét azoknak az embereknek, akikkel egy korban élünk s átadja őket azoknak, akik majd miutánunk jönnek; az elmúlt századok munkái ily módon nem lesznek fölöslegesek az eljövendő századoknak; unokáink nemcsak műveltebbek, hanem erényesebbek és boldogabbak is lesznek; s mi magunk se halunk meg anélkül, hogy ne használnánk az emberiségnek.”

Denis Diderot,
főszerkesztő
(1713-84)

A tudás jellege és a haladás

Diderot számára a **tudás**:

- pozitív, kumulatív (felhalmozódó): egyre bővülő ismeretek
- az emberiség javát és haladását szolgálja
- az ember emancipációjának és boldogulásának eszköze
- autonóm: politika- és vallás-mentes („tiszta”)
- demokratikus: a lehető legszélesebb körben ismert

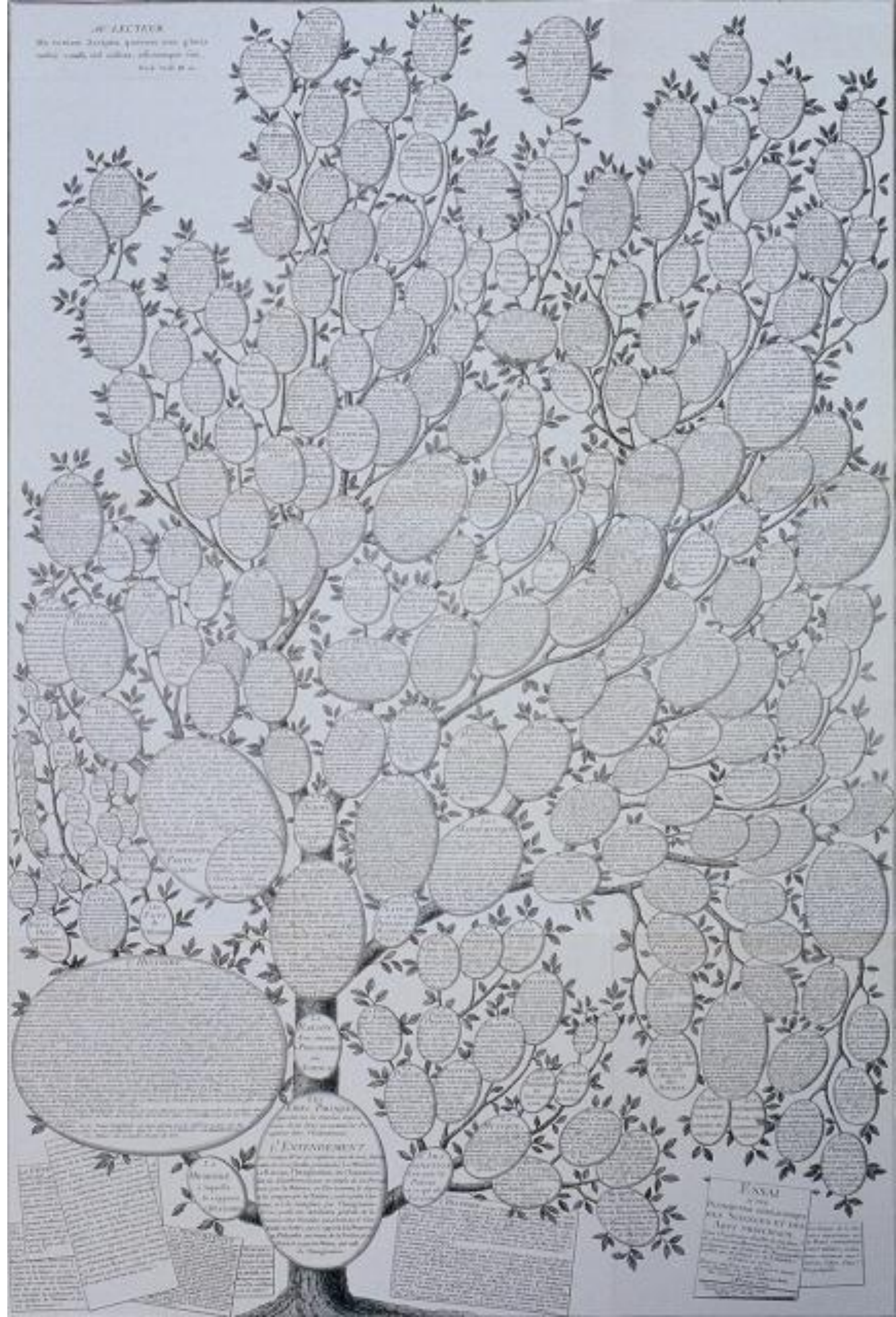
Condorcet márki (1743-94) számára a történelem célja: az egyre tökéletesebb emberi világ → ennek eszköze a **felvilágosodás**:

- anyagi, erkölcsi, szellemi zsarnokság elleni lázadás
- társadalmi egyenlőség, egyéni szabadság
- nincsenek természeti gátak: örökös haladás lehetséges
- az egyetlen korlát maga az ember
- a haladás természeti (és természetes) folyamat

A tudás fája

Sokáig uralkodó mintázat a tudás területeinek osztályozásában:

- emlékezet → történelem
- értelem → filozófia
  - Isten: mindenféle teológiák
  - lélek: lélekfilozófia, érzékeléstan
  - ember: etika, logika
  - természet: matematika, fizika, csillagászat, kémia, stb.
- képzelet→ művészetek



*SYSTÊME FIGURÉ DES CONNOISSANCES HUMAINES.

ENTENDEMENT.

MEMOIRE.

- HISTOIRE
  - SACRÉE. (Histoire des Prophéties.
  - ECCLESIASTIQUE.
  - CIVILE, ANC. ET MODERNE.
    - Hist. Civile, proprement dite.
      - Mémoires.
      - Antiquités.
      - Histoire complete.
    - Histoire Litteraire.
  - NATURELLE.
    - Uniformité de la Nature.
      - Histoire céleste.
      - Histoire
        - des Meteores.
        - de la Terre et de la Mer.
        - des Mineraux.
        - des Vegetaux.
        - des Animaux.
        - des Elemens.
    - Ecarts de la Nature.
      - Prodiges célestes.
      - Meteores prodigieux.
      - Prodiges sur la Terre et la Mer.
      - Mineraux monstrueux.
      - Vegetaux monstrueux.
      - Animaux monstrueux.
      - Prodiges des Elemens.
    - Usages de la Nature.
      - Arts.
      - Métiers.
      - Manufactures.
        - Travail et Usages de l'Or et de l'Argent.
          - Monnoyeur.
          - Batteur d'Or.
          - Fileur d'Or.
          - Tireur d'Or.
          - Orfevre.
          - Planeur.
          - Metteur en œuvre, &c.
        - Travail et Usages des Pierreries et précieuses.
          - Lapidaire.
          - Diamentaire.
          - Joaillier, &c.
        - Travail et Usages du Fer.
          - Grosses Forges.
          - Serrurerie.
          - Taillanderie.
          - Armurerie.
          - Arquebuserie, &c.
        - Travail et Usages du Verre.
          - Verrerie.
          - Glaces.
          - Miroitier.
          - Lunetier.
          - Vitrier, &c.
        - Travail et Usages des Peaux.
          - Tanneur.
          - Chamoiseur.
          - Peaussier.
          - Gantier, &c.
        - Travail et Usages de la Pierre, du Platre, de l'Ardoise, &c.
          - Architecture pratique.
          - Sculpture pratique.
          - Maçon.
          - Couvreur, &c.
        - Travail et Usages de la Soie.
          - Tirage.
          - Moulinage.
          - Ouvrages, comme Velours, Etoffes brochées, &c.
        - Travail et Usages de la Laine.
          - Draperie.
          - Bonneterie, &c.
        - Travail et Usages, &c.

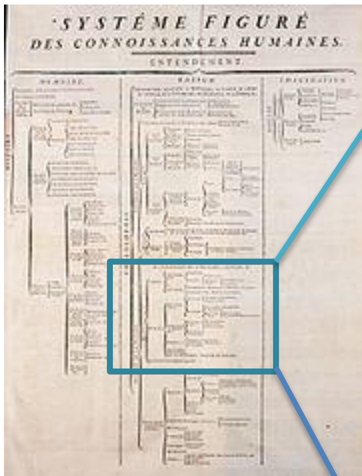
RAISON.

- PHILOSOPHIE.
  - Métaphysique générale, ou Ontologie, ou Science de l'Etre en général, de la Possibilité, de l'Existence, de la Durée, &c.
  - Science de Dieu.
    - Théologie naturelle.
    - Théologie révélée.
      - Religion, D'où par abus, Superstitions.
    - Science des Esprits bien et mal faisans.
      - Divination.
      - Magie noire.
  - SCIENCE DE L'HOMME.
    - Pneumatologie ou Science de l'Ame
      - Raisonnable.
      - Sensitive.
    - LOGIQUE.
      - Art de penser.
        - Appréhension. — Science des Idées.
        - Jugement.... Science des Propositions.
        - Raisonnement. — Induction.
        - Méthode... — Démonstration.
          - Analyse.
          - Synthese.
      - Art de retenir.
        - Mémoire...
          - Naturelle.
          - Artificielle.
            - Prénotion.
            - Emblême.
        - Supplément de la Mémoire.
          - Ecriture.
          - Imprimerie.
            - Alphabet.
            - Chiffres...
              - Arts d'écrire, d'imprimer, de lire, de déchiffrer.
                - Orthographe.
      - Art de communiquer.
        - Science de l'instrument du Discours.
          - Grammaire.
            - Signes...
              - Geste....
                - Pantomime.
                - Déclamation.
              - Caracteres.
                - Idéaux.
                - Hiéroglyphiques.
                - Héraldiques ou Blason.
            - Prosodie.
            - Construction.
            - Syntaxe.
            - Philologie.
            - Critique.
            - Pédagogique.
              - Choix des Etudes.
              - Maniere d'enseigner.
        - Science des qualités du Discours.
          - Rhétorique.
          - Méchanique de la Poésie ou Versification.
    - MORALE
      - Générale. — Science du bien et du mal en général. Des devoirs en général. De la vertu. De la nécessité d'estre vertueux, &c.
      - Particuliere. — Science des Loix, ou Jurisprudence.
        - Naturelle.
        - Œconomique.
        - Politique.
          - Commerce intérieur, extérieur, de Terre, de Mer.
  - SCIENCE DE LA NATURE.
    - Métaphysique des Corps, ou Physique générale. De l'Etendue, de l'Impénétrabilité, du Mouvement, du Vuide, &c.
    - MATHEMATIQUES
      - Pures.
        - Arithmétique.
          - Numérique.
          - Algebre...
            - Elémentaire.
            - Infinitésimale.
              - Différentielle.
              - Intégrale.
        - Géométrie.
          - Elémentaire. (Architecture Militaire. Tactique.
          - Transcendante. (Théorie des Courbes.
      - Mixtes.
        - Méchanique.
          - Statique...
            - Statique, proprement dite.
            - Hydrostatique.
          - Dynamique.
            - Dynamique, proprement dite.
            - Balistique.
            - Hydrodynamique.
              - Hydraulique.
              - Navigation, Archit. Navale.
        - Astronomie géométrique.
          - Cosmographie.
            - Uranographie.
            - Géographie.
            - Hydrographie.
          - Chronologie.
          - Gnomonique.
        - Optique....
          - Optique, proprement dite.
          - Dioptrique. Perspective.
          - Catoptrique.
        - Acoustique.
        - Pneumatique.
        - Art de conjecturer. Analyse des hazards.
      - Physicomathématiques.
    - PHYSIQUE PARTICULIERE.
      - Zoologie...
        - Anatomie
          - Simple.
          - Comparée.
        - Physiologie.
        - Medecine...
          - Hygiene...
            - Hygiene, proprement dite.
            - Cosmétique. (Orthopédie.
            - Athlétique. (Gymnastique.
          - Pathologie.
          - Sémiotique.
          - Thérapeutique.
            - Diete.
            - Chirurgie.
            - Pharmacie.
        - Vétérinaire.
        - Manege.
        - Chasse.
        - Pesche.
        - Fauconnerie.
      - Astronomie Physique. Astrologie.
        - Astrologie Judiciaire.
        - Astrologie Physique.
      - Météorologie.
      - Cosmologie.
        - Uranologie.
        - Aérologie.
        - Géologie.
        - Hydrologie.
      - Botanique.
        - Agriculture.
        - Jardinage.
      - Minéralogie.
      - Chimie...
        - Chimie, proprement dite. (Pyrotechnie. Teinture, &c.
        - Métallurgie.
        - Alchimie.
        - Magie naturelle.

IMAGINATION.

- POESIE
  - SACRÉE. PROFANE.
    - Narrative.
      - Poeme Epique.
      - Madrigal.
      - Epigramme.
      - Roman, &c.
    - Dramatique.
      - Tragédie.
      - Comédie.
      - Opera.
      - Pastorales, &c.
    - Parabolique. — Allégories.
  - Musique.
    - Théorique.
    - Pratique.
    - Instrumentale.
    - Vocale.
  - Peinture.
  - Sculpture.
  - Architecture civile.
  - Gravure.

A csillagászat helye



→ a csillagászat („geometriai csillagászat”) a matematika része

A Bevezetőből:

„Miután végül visszatértünk a fizikai világhoz, máris észrevesszük, hogy milyen hasznot hajt a Geometria és a Mechanika, melyek által szert tehetünk a legváltozatosabb és legalaposabb tudásra a testek tulajdonságairól. Nagyjából így születtek az úgynevezett fizikai-matematikai tudományok is. Élükre az Asztronómiát tehetjük, melynek vizsgálata – önmagunk vizsgálata után – a legméltóbb a figyelmünkre amiatt a csodálatos látvány miatt, melyet elénk tár. Észlelés és számítások összekapcsolódnak és kölcsönösen értelmezik egymást, így e tudomány csodálatos pontossággal meg tudja határozni az égitestek távolságait és legbonyolultabb mozgásait, miközben azokra az erőkre is rámutat, melyek e mozgásokat eredményezik vagy módosítják. Így aztán joggal tekinthetjük a Geometria és Mechanika kombinációjának legfenségesebb és legmegbízhatóbb alkalmazásaként, haladását pedig tarthatjuk a legvitathatatlanabb emlékműnek mindazon sikerek közül, melyekhez a szorgos emberi elme felemelkedni képes.”

Jean le Rond d'Alembert, a tudományos szócikkek legfőbb szerzője

Newton szerepe

- Voltaire *Elémens de la philosophie de Neuton* c. művének borítója (1738)
- Fent, balra: Newton a fellegekben, az Igazság fényének forrása (közelében)
- Fent, jobbra: Mme du Châtelet, Voltaire segítője és szeretője, tükrözi a fényt
- Lent: Voltaire a visszavert fényben dolgozik

⇒ ő mutatta meg, hogyan lehet az embernek kiemelkedni a tévedések útvesztőjéből: ész és matematika

A **matematika** 1700 körül

- Intézményesülés: társaságok, folyóiratok, szakmai közösség, kommunikáció…
- Eufórikus hangulat: a régiek túlszárnyalása, a haladás eszméje
  - mennyiségi forradalom: 1500 és 1700 között az európai matematikusok sokkal többet alkottak, mint a görögök 1000 év alatt
  - minőségi forradalom: születőben/elterjedőben az algebra (mint alaptudomány), analízis, anal. geo., val. szám., projektív geo., stb. (az eukleidészi örökség háttérbe szorul és átértelmezésre kerül)
- Sikerek az alkalmazásokban, de problémák az elméleti alapokkal
  - fokozatos eltolódás az eredményorientált (vs. „tiszta”) matek felé
  - intim összefonódás a természettudományokkal (mechanika)

- (Ebbe részben a történelmi besorolás miatt, részben a newtoni irányvonal miatt beletartozik a csillagászat, vagy annak elméleti része is)

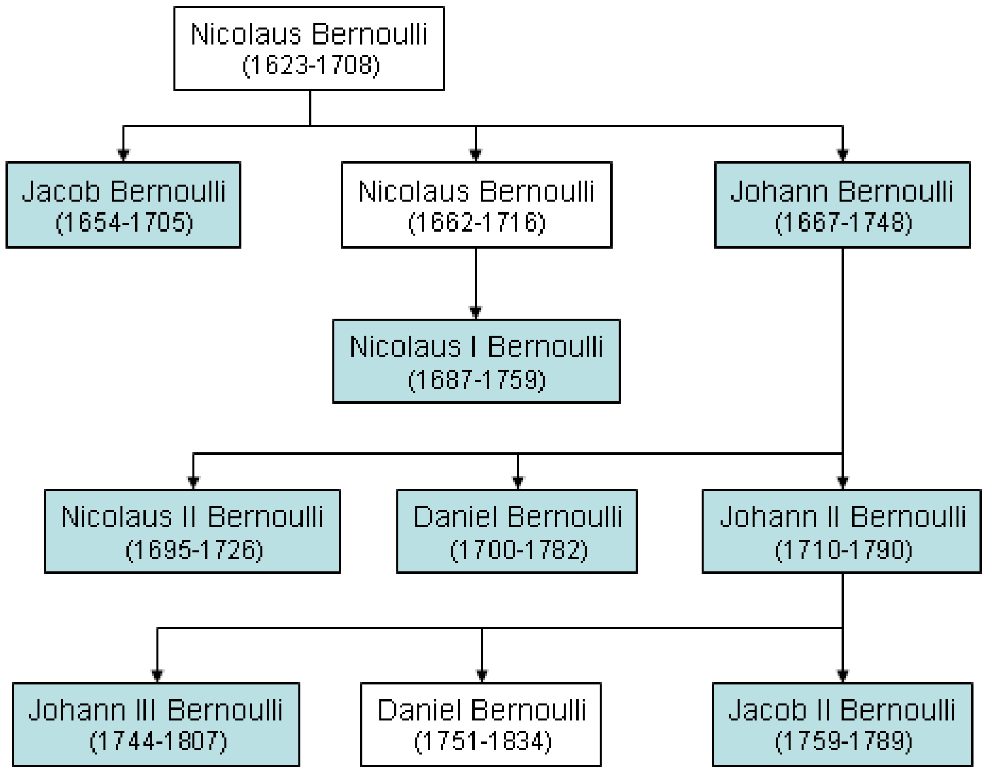
A Bernoulli-család

Egy csomó híres svájci tudós (kék: tudós):

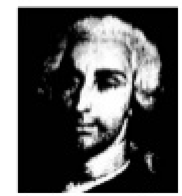
Jacob
1654-1705

Johann
1667-1748

Nicolaus II
1695-1720



Daniel
1700-1782



Johann II
1710-1790

Johann III
1744-1807

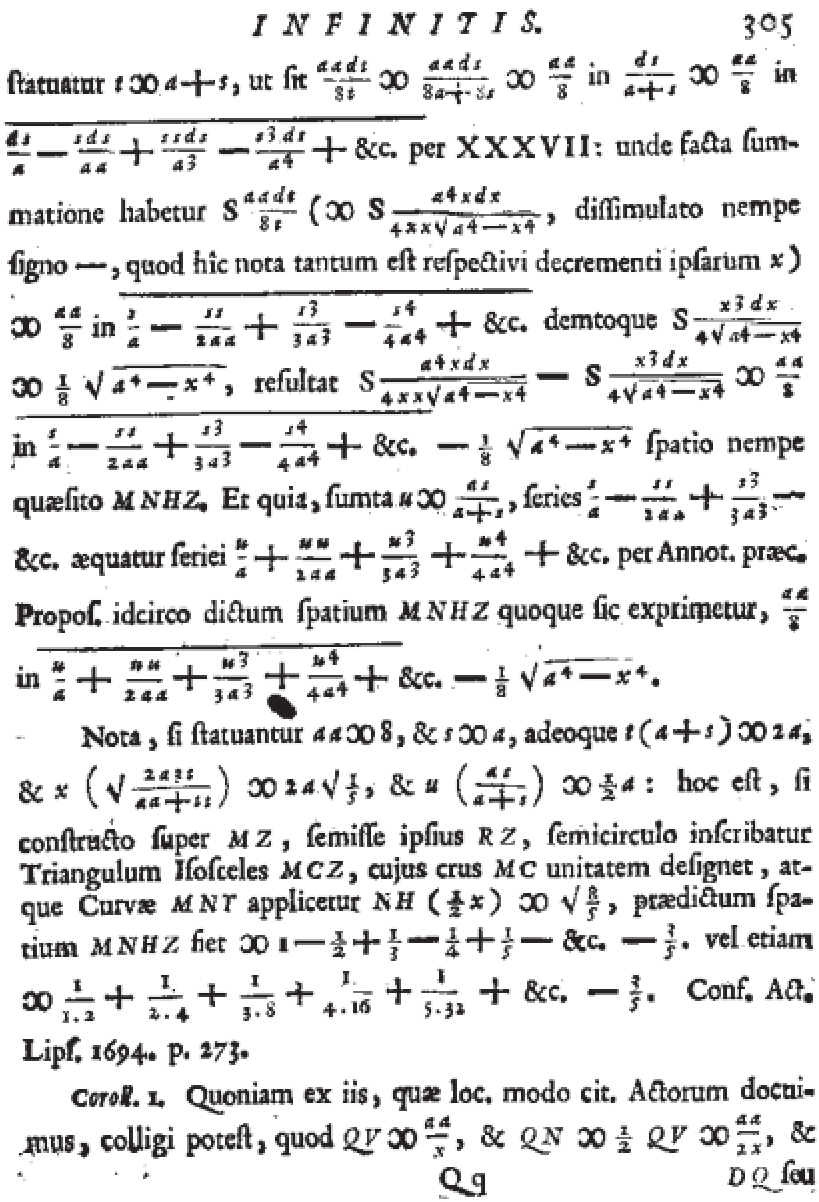
Jacob II
1759-1789

- **Jacob Bernoulli** (1655-1705)
  - Leibniz támogatója és matematikájának továbbgondolója
  - a variációszámítás egyik megalapozója
  - differenciálegyenletek felé (Bernoulli-egyenlet)
  - véges (B-egyenlőtlenség) és végtelen (konvergencia) sorok
  - az *e* konstans „felfedezője”
  - a valószínűségszámítás egyik alapművét írta (*Ars conjectandi*, 1713)
  - stb. stb.

- **Johann Bernoulli** (1667-1748)
  - az első nyomtatott analízis-tankönyv (1696)
  - a variációszámítás másik megalapozója
  - analitikus geometria (kúpszeletek) úttörője
  - Leibniz „bulldogja”, Euler tanára

- Johann 3 fia, Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-82) és II. Johann (1710-90) a Szentpétervári Akadémia munkatársai, főleg val.szám. és mat.fiz.

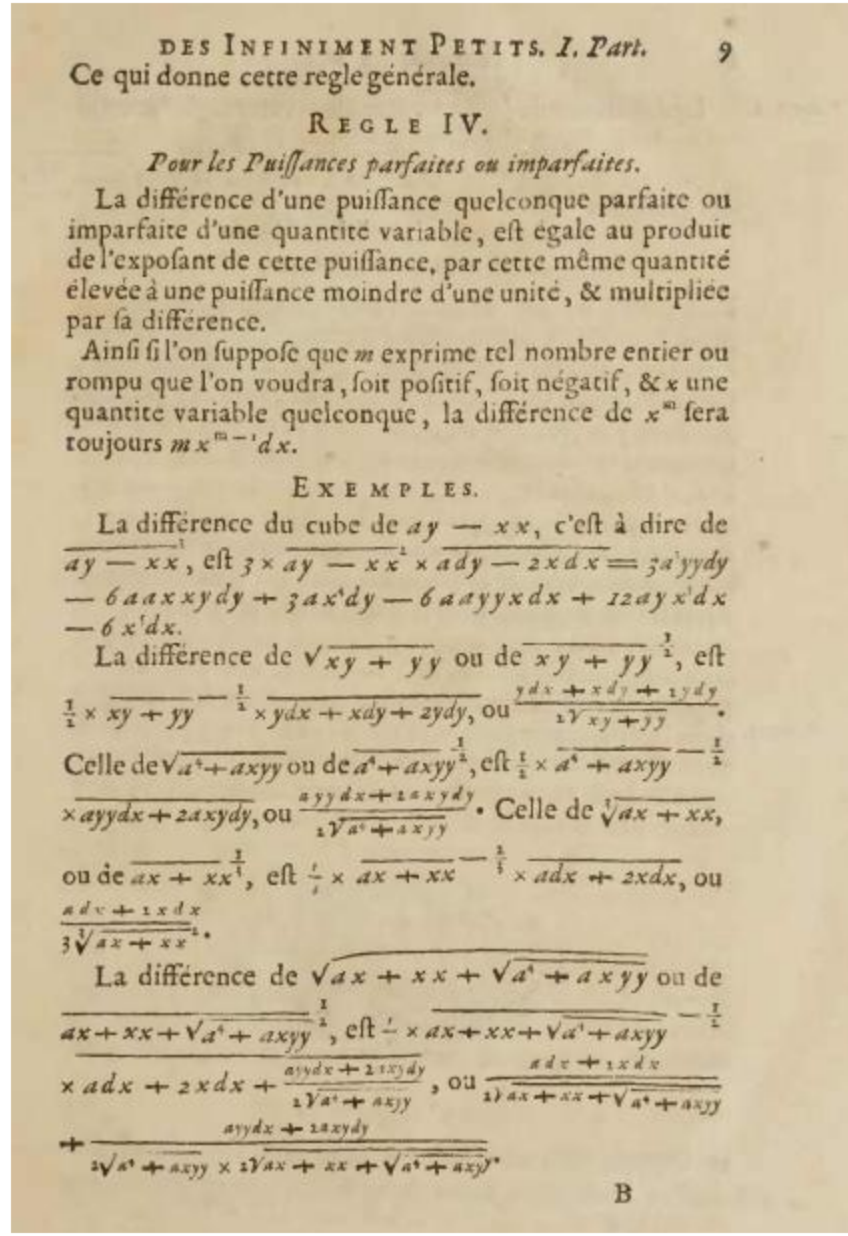
$\Rightarrow$ a Leibniz-féle analízis válik az alapmatematikává a kontinensen: gyors fejlődés



statuatur $t \infty a+s$, ut sit $\frac{aads}{8t} \infty \frac{aads}{8a+8s} \infty \frac{aa}{8}$ in $\frac{ds}{a+s} \infty \frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{ds}{a} - \frac{sds}{aa} + \frac{ssds}{a^3} - \frac{s^3ds}{a^4} + \&c.}$ per XXXVII: unde facta summatione habetur $S\frac{aads}{8t}$ ($\infty\, S\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$, dissimulato nempe signo $-$, quod hic nota tantum est respectivi decrementi ipsarum x) $\infty \frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.}$ demtoque $S\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$, resultat $S\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - S\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \infty \frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.} - \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$ spatio nempe quaesito $MNHZ$. Et quia, sumta $u \infty \frac{as}{a+s}$, series $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} -$ &c. aequatur seriei $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} +$ &c. per Annot. praec. Propos. idcirco dictum spatium $MNHZ$ quoque sic exprimetur, $\frac{aa}{8}$ in $\overline{\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.} - \frac{1}{8}\sqrt{a^4-x^4}$.

Nota, si statuantur $aa \infty 8$, & $s \infty a$, adeoque $t\ (a+s) \infty 2a$, & $x\ \left(\sqrt{\frac{2a^3s}{aa+ss}}\right) \infty 2a\sqrt{\frac{1}{5}}$, & $u\ \left(\frac{as}{a+s}\right) \infty \frac{1}{2}a$: hoc est, si constructo super MZ, semisse ipsius RZ, semicirculo inscribatur Triangulum Isosceles MCZ, cujus crus MC unitatem designet, atque Curvae MNT applicetur $NH\ (\frac{1}{2}x) \infty \sqrt{\frac{8}{5}}$, praedictum spatium $MNHZ$ fiet $\infty\, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ &c. $- \frac{3}{5}$. vel etiam $\infty \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} +$ &c. $- \frac{3}{5}$. Conf. Act. Lips. 1694. p. 273.

Coroll. 1. Quoniam ex iis, quae loc. modo cit. Actorum docuimus, colligi potest, quod $QV \infty \frac{aa}{x}$, & $QN \infty \frac{1}{2}\ QV \infty \frac{aa}{2x}$, &



Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les Puissances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence.

Ainsi si l'on suppose que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, soit positif, soit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m sera toujours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'est à dire de $\overline{ay-xx}^3$, est $3 \times \overline{ay-xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy+yy}$ ou de $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx + xdy + 2ydy}$, ou $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$. Celle de $\sqrt{a^4 + axyy}$ ou de $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx + 2axydy}$, ou $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax+xx}$, ou de $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, est $\frac{1}{3} \times \overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}} \times \overline{adx + 2xdx}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} \times \overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$, ou $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy} \times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

Egy oldal Jakob *Ars conjectandi*-jából

Egy oldal Johann tankönyvéből

A matematika szigora

„Nem meglepő, hogy Eukleidész annak bizonyításán fáradozik, hogy két, metsző kör középpontja nem lehet azonos, vagy hogy egy háromszög oldalainak összege kisebb a köré írt másik háromszög oldalainak összegénél. Ennek a geométernek ugyanis csökönyös szofistákat kellett meggyőznie, akik a legevidensebb igazságok elvetését tartották a legnagyobb dicsőségnek, így aztán a geometriának – csakúgy, mint a logikának – formális érvelésen kellett alapulnia ahhoz, hogy kivédje a kicsinyes kötözködést. Ám mára fordult a kocka. Minden olyan érvelés, amely csak azt fejti ki, amit a józan ész már eleve tudott, csupán az olvasó fárasztását szolgálja, így ezektől ma inkább eltekintünk.”

↑ Alexis Clairaut (1713-1765)

⇒ ha nem megy a szigorú logikai megalapozás, akkor nem is kell: a gyakorlat majd igazol utólag

A **csillagászat** állása

A 18. század elejére az ismert Naprendszer:

- 18 dologból áll: Nap + 6 bolygó + 10 hold (1 F, 4 J, 5 Sz) + 1 gyűrű
  - üstökösök: időnkénti látogatók (→ később: esetleg rendszeresen), ám nincsenek hatással a többire
  - csillagok: több ezer, de ezek nagyon messze vannak, és nincs számottevő hatásuk a Naprendszerre
- a mozgásuk elég jól ismert, távolságuk kb. becsülhető (arányok pontosan)
- majdnem mind gömb alakú (a gyűrűt hagyjuk)
- mind hat mindegyikre gravitációsan, de más módon nem nagyon (picit hő)

⇒ **Feladat:** Adott e testek helye és mozgása valamely időpontban. Vezessük le a kölcsönös vonzásuk alapján, matematikai számítások segítségével a helyüket és mozgásukat más időpontokra, és mutassuk meg, hogy az eredmény egyezik az észlelésekkel!

  - ehhez tudni kell a tömegüket → ezt becsülni kell úgy, hogy minél jobban egyezzen a számítás a megfigyelésekkel

Az általános feladat

- Ennyi test egymásra hatását nem lehet egyszerre vizsgálni
- Kéttest-probléma: csak két test hat egymásra → Newton megoldja (módosított Kepler-törvények)
- Háromtest-probléma: három test kölcsönös hatása → ez is rendkívül bonyolult (zárt analitikus alakban megoldhatatlan: 19. sz. vége)

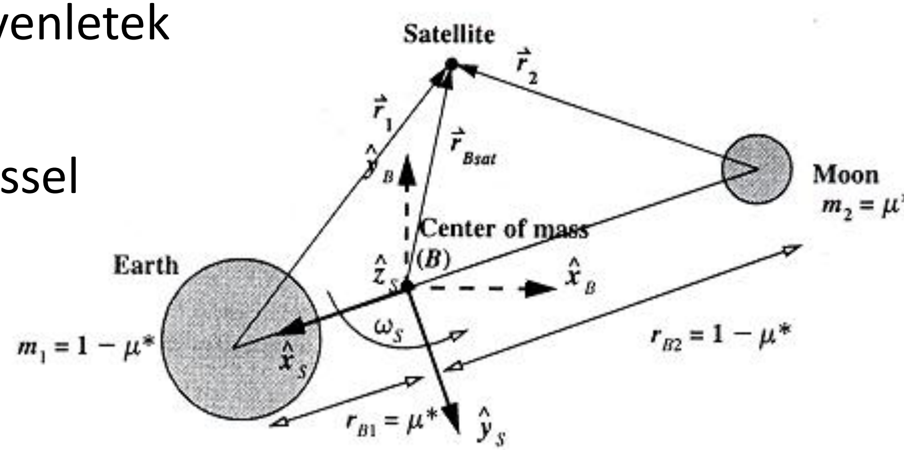
$$\underline{F}_{ij} = k^2 \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\underline{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

Newton-egyenletek

$$U = \frac{1}{2} k^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

helyettesítéssel

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$



alakra hozhatók.

→ Különböző fizikai integrálokkal (tömegközéppont, impulzusmomentum, energia) az egyenletek nyolcadrendű rendszerre redukálhatók

A feladat egyszerűsítése

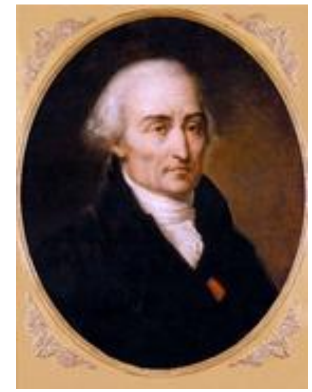
- Egyszerűsítések:
  - egy kiterjedt gömb grav. hatása olyan, mintha a TKP-ba lenne sűrítve → *tömegpontok*kal lehet számolni
    - a gömbtől való eltérések ezek után külön vizsgálhatók (pl. precesszió)
  - minden test mozgását elsősorban *egyetlen másik* határozza meg (Nap vagy anyabolygó)
    - a többi hatása ezek után külön vizsgálható: **perturbációk** (zavarok)
  - a hatások együttes eredménye ugyanaz, mint az egyes hatások eredményeinek összege → *külön* vizsgálhatók: a Naprendszer független háromtest-rendszerek összességeként tekinthető
  - kicsik az excentricitások (→ kb. kör) és a pályahajlások (kb. sík)
- Így első körben minden körhöz közeli ellipszispályán mozog vmi más körül, és a többi test csak kicsit zavarja ebben (**korlátozott háromtest-probléma**) → egyre több zavaró hatást lehet egyre jobban figyelembe venni, és a közelítő eredmények egyre pontosodnak

A feladat megoldói

CDE

L^2

Leonhard Euler
(1707-83)



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)

Alexis Claude Clairaut
(1713-1765)

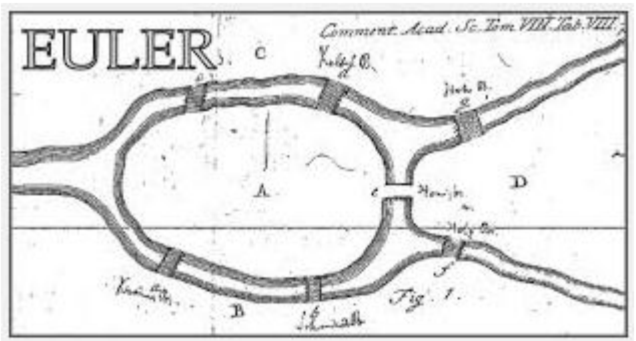
Jean-le-Rond D'Alembert
(1717-1783)

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

Leonhard Euler

- Állomások:
  - 1707-27: Svájc, Bázeli Egyetem → tanára: Johann Bernoulli → az első, Anglián kívüli newtoniánussá válik
  - 1727-41: Szentpétervári Akadémia (Daniel and Nicolaus B. mellé)
  - 1741-66: Berlini Akadémia
  - 1766-83: ismét Szentpétervár
- 13 gyerek (5 nő fel)
- Vakság: 1738: egyik szemére; 1771: teljesen ↔ nem zavarja a munkában
- Szakma:
  - 13-szor nyeri el a Francia Akadémia éves nagydíját
  - életében több, mint 800 írást (könyv vagy cikk) készít, 560 megjelenik → minden idők egyik legtermékenyebb tudósa
    Hajálakor: „Megszűnt számolni és élni” (Condorcet)
  - főleg a matematika mindenféle ága, ennek a csillagászat csak „mellékterméke”

- az egyik legsikeresebb jelölés-bevezető
  - *e*, *i*, Π; sin, cos, tan
  - geometria: *a*, *b*, *c* a háromszög oldalai; *A*, *B*, *C* a csúcsai
  - $\sum$, Δx, $\Delta^2 x$, $f(x)$, stb.
- rengeteg terület:
  - számelmélet: prímek, tökéletes számok, barátságos számpárok
  - algebra: végtelen sorok (trigo.), képzetes számok, egyenletek
  - analízis: differenciálegyenletek alapjai
  - analitikus geo.: görbék szisztematikus paraméterezése
  - gráfelmélet: Königsberg hídjai
  - topológia: poliéder-sejtés



c – *é* + *l* = 2

Alexis Claude Clairaut

- Matematikai csodagyerek → 13 évesen előad az Akadémián, 18 évesen tagja
- 1736: Maupertuis expedíciója Lappföldre → a Föld alakja
  - 1743: minden addiginál pontosabb megoldás, alapjaiban máig jó
- 1758: perturbációs pályaszámítások a Halley-üstökösre
  → a Szaturnusz kb. 100, a Jupiter kb. 518 nappal késlelteti
  → várható perihélium: 1759. április 13 +/- 1 hónap
  → valóság: március 12
  → ez teszi igazán híressé (iszonyú bonyolult és hosszú számítások)
- „Az estéknek és a lakomáknak szentelte magát, és élénk érdeklődést mutatott a nők iránt, és amikor megpróbálta a gyönyört belevinni hétköznapi munkájába, elveszítette nyugalmát, az egészségét, majd 52 éves korában az életét is.” (Charles Bossut, 1730-1814)

$$g = G\left[1 + \left(\frac{5}{2}m - f\right)\sin^2\varphi\right]$$

A grav. gyorsulás a Földön

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

A Clairaut-egyenlet

$$r(t)\cos\theta(t) = \text{constant}.$$

A Clairaut-reláció

Jean-le-Rond D'Alembert

- keresztnév: a templom, aminek lépcsőjén találták → mindig viszonylag szegény és szerény marad (nem fogadja el Katalin és Frigyes meghívásait)
- nagy riválisa Clairaut-nak → minden munkáját hevesen kritizálja
- 1743: *Traité de Dynamique* → a D'Alembert-elv első megfogalmazása + Newton 3. törvényének alapos vizsgálata
- 1749: mű a precesszióról és nutációról → helyes magyarázat
- az Enciklopédia egyik szerzője (pl. Bevezetés), tudományos főszerkesztő
- Később kevesebb matek, inkább szervezői teendők (Akadémia titkára) + filozófia, politika, irodalom
- Bár igen elismert ember, jeltelen sírba temetik (közismert, hogy hitetlen)

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

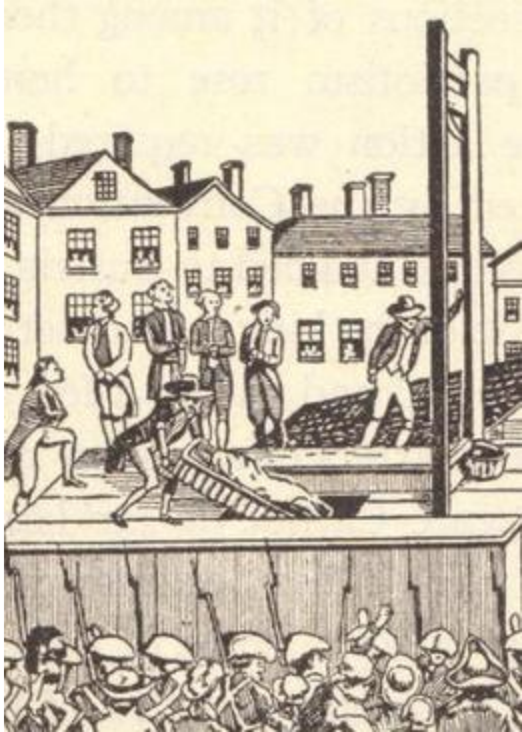
D'Alembert-operátor (hullámmechanika)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x),$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x-ct) + g(x+ct)\right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\xi)\, d\xi.$$

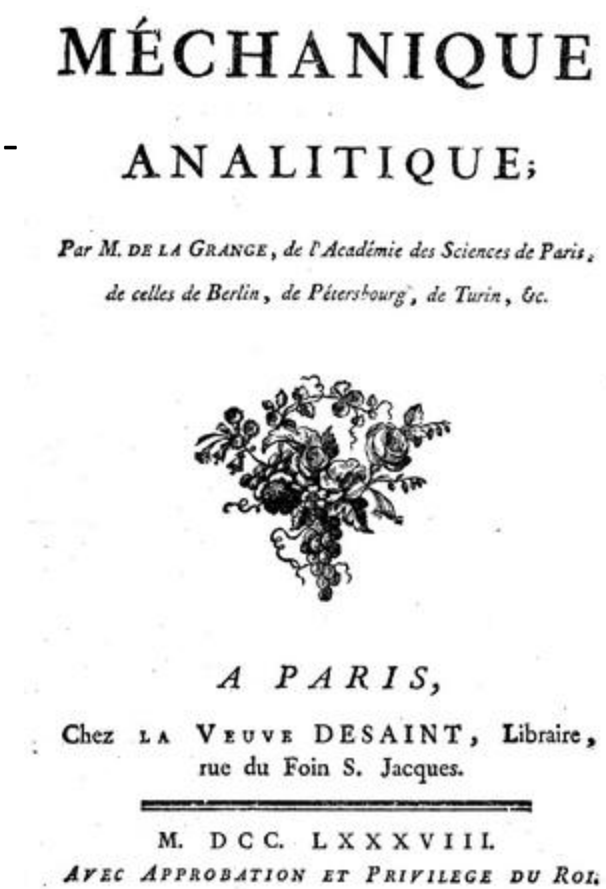
a D'Alembert-egyenlet (hullámok) alakjai

Joseph-Louis Lagrange

- Torinóban élő, francia származású családból (Giuseppe Luigi Lagrangia)
- a Torinói Tudományos Akadémia egyik fő előkészítője
- variációszámítással foglalkozik → Euler felveteti a Berlini Akadémiára (1766)
  - II. Frigyes: Európa legnagyobb királyának Európa legnagyobb matematikusára van szüksége
- 1687: Párizs, az Akadémia tagja
  - 1790-99: a Súly- és Mértékügyi Bizottság elnöke
(→ SI rendszer alapja)
→ az Akadémia bezárásakor (1793) tovább dolgozik
  - (Lavoisier menti meg a külföldieknek járó kivégzéstől, de magát nem tudja)
  - tanári állások: 1795: *École Normale*,
1797: *École Polytechnique*
  - élete végén Napóleon többszörösen kitünteti



- Rengeteg matematikai területtel foglalkozik: differenciálszámítás, variációszámítás, számelmélet, analitikus geometria, algebra, stb…
- Főmű: *Mécanique analitique*, 1788
  - a Newton óta eltelt idő minden munkájának összefoglalása
  - a virtuális munka fogalmából a variációszámítás segítségével levezeti az egész mechanikát (szilárd testekre és folyadékokra)
  - „Ebben a műben nincsenek ábrák. Az általam használt módszer nem igényel sem szerkesztéseket, sem geometriai vagy mechanikai bizonyításokat, hanem csakis algebrai műveleteket, melyek egységes és általánosan szabályszerű eljárás alá esnek. Akik szeretik az analízist, örömmel látják, hogyan válik a mechanika az egyik ágává, és lekötelezem őket azzal, hogy kiterjesztem hatókörét."



MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

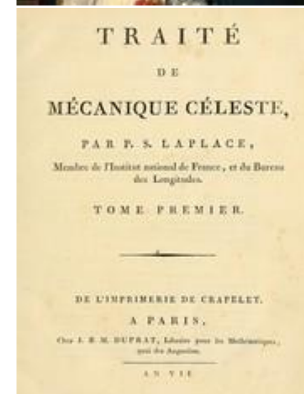
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

- Analízis mindhalálig:
  Théorie des fonctions analitiques (1797)
  Résolution des équations numeriques (1798)
  Leçons sur le calcul des fonctions (1805)

Pierre-Simon Laplace

- Francia, párizsi, az Akadémia tagja (1773), a Súly- és Mértékügyi Bizottság tagja (→ biztonság a Terror ideje alatt), Napóleont vizsgáztatja egy tüzériskolában
- Napóleon tiszteli, így ragokat kap (1806: gróf; 1817: márki)
  + 1799-beb belügyminiszter
- *Mécanique Céleste*: 5 kötet (1799-1825)
  - mindent összefoglal, ami a területen Newton óta történt (beleértve saját korábbi eredményeit)
  - „A csillagászat, ha a lehető legáltalánosabban tekintjük, a mechanika nagy problémája, melynek önkényes adatai az égi mozgások elemei, és melynek megoldása egyszerre múlik az észlelések pontosságán és az elemzés színvonalán."
- *Exposition du système du monde*, 1796
  - ismeretterjesztő munka: nincs benne matek
- egyebek: valószínűségszámítás, statisztika, fizika számos ága, filozófia…

Sztori: „Laplace úr, úgy hallom, Ön írt egy hatalmas könyvet az univerzum szerkezetéről, ám abban egyszer sem említi meg annak Teremtőjét. Hogy van ez?”



„Nem volt szükségem erre a hipotézisre, Felség.”

- persze a sztori hitelessége erősen vitatott
- viszont rendkívül közismert
- és összefüggésbe hozható a Laplace-démonnal:
  ha az ismerné az összes részecske fizikai paramétereit egy adott időpontban, és végtelenül jó matematikus lenne, akkor ki tudná számolni a világ bármely jövőbeli állapotát
  $\Rightarrow$ determinisztikus világkép ($\rightarrow$ Isten helye?)

A módszer 1. – CDE

- Alapötlet (Clairaut, D'Alembert):

  ha $-f(r)\mathbf{e}_r = m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta$ a 2. Newton-egyenlet polárkoodinátás alakja radiális komponensre, akkor

  - helyettesítve $h = r^2\dot{\theta}$: $m(\ddot{r} - h^2 r^{-3}) = -f(r)$ (nemlieáris diff. egy.)
  - helyettesítve $u = 1/r$: $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{f(1/u)}{mh^2u^2}$ (lináris diff. egy. független változóval)
  - helyettesítve $f(1/u) = m\mu u^2$ ($\leftarrow$ gravitációs vonzás): $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}$

- Tehát a lényeg: úgy egyszerűsítsük az egyenleteket, hogy a *fizikailag értelmezhető tagok* kifejezésével és helyettesítésével egyszerűbb formára hozzuk
- Ez már Euler 30-as években kidolgozott módszere szerint megoldható (lineáris diff.egy. konstans együtthatókkal → trigonometrikus és hatványsorok)

  $\Rightarrow$ megoldás: $u = A\cos(\theta - \theta_0) + \mu/h^2$, és ha $\ell = h^2/\mu$ és $e = \ell A$, akkor

$$r = \frac{\ell}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

Kúpszeletek:

e:	= 0	> 0, < 1	= 1	> 1
pálya:	kör	ellipszis	parabola	hiperbola

A módszer 1. – L^2

- Lagrange, *Mécanique analitique*, 1788: nem kell általában 3D KR-ben nézni, mert a fizikai feltételek sok mozgást eleve kizárnak és összefüggéseket teremtenek a paraméterek között
  - ezeket a feltételeket bele kell foglalni a mozgás geometriájába (általánosított koordináták: q_i)
  - fizikai feltételek (pl. megmaradási törvények) határozzák meg a rendszer geometriaként felfogott stuktúráját
  - (*térdimenziók száma*) x (*a rendszer összetevőinek száma*) – (*korlátozások száma*) = = (*szabadsági fokok száma*) = (*általánosított koordináták száma*)

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j,$$ a virtuális elmozdulás egy ilyen térben

$\Rightarrow$ így válik a matematika fizikává és a fizika matematikává

A módszer 2.

- **D'Alembert-elv**: D'Alembert már 1743-ban felvetette, de Laplace fogta igazán munkára és tette alapvetővé
- A fizikai korlátozások szerint mozgó testen végzett virtuális munka 0:

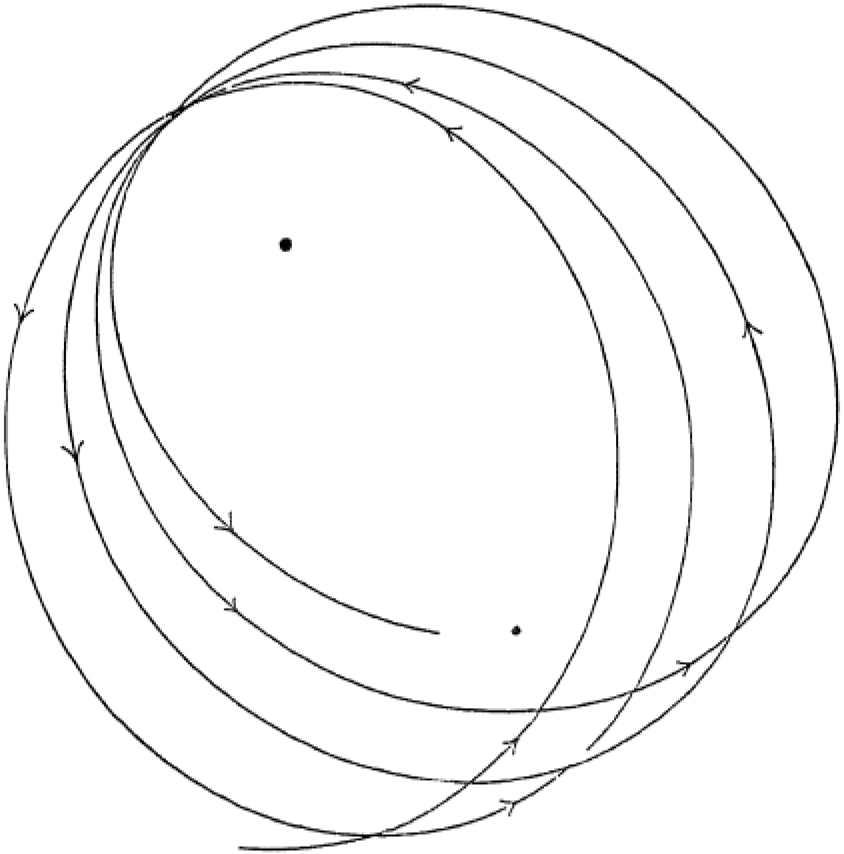
$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$ (így az *m·a* mennyiség virtuális erővé válik)

- Így lesznek általánosított erők: $$Q_j = \frac{\delta W}{\delta q_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$
- Végül az általánosított mozgásegyenlet: (ez tartalmazza a Newton-törvényeket) $$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$
- (Ebből vezetik le a Lagrange-egyenleteket:) $$\frac{\delta L}{\delta r_j} + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial r_j} = 0$$ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

A módszer 3. – CDE

Euler:

- a kúpszelet-pályák a kéttest-probléma megoldásai, nem a háromtesté
- de ha az egyik hatás kicsi (perturbáció), akkor úgy lehet tekinteni, mintha egy ellipszis lassan mozogna v. változna (Ptolemaiosz és Euler közti idő alatt a perihélium szöge kb. 5°-ot változott)
- stabil pálya *változó pályaelemek*kel:
  - nagyság
  - alak
  - helyzet



- néhány egyszerű esetben tudja számolni az ellipszis változását, de általában túl nehéz

Eredmények: a Hold mozgása

- Jelentőség:
  - fontos gyakorlati probléma (földrajzi hosszúság mérése)
    → az Akadémia kb. évente nagydíjat tűz ki az egyre jobb megoldásokra
  - a háromtest-probléma alapesete: a Hold mozgását a Föld határozza meg
    + erre jön rá a Nap okozta zavar (igaz, hogy nagy, de mert messze van)
    + a többi égitest nem szól bele (nem olyan nagyon, és túl messze vannak)
  - Newton: néhány ismert szabálytalanságot kvalitatíve megmagyaráz, és néhány, még ismeretlen létét előrejelzi ↔ a részletek és kvantitatív pontosság még váratnak magukra
- Euler, Clairaut, D'Alembert: analízissel támad a geometria helyett
  → eleve tovább pontosítható, nem kell mindig újabb szerkesztést kitalálni
  → minden ismert szabálytalanság magyarázhatóvá válik kvalitatíve és kvantitatíve is (kivéve: a középmozgás szekuláris gyorsulása (Halley) – Euler és D'Alembert sikertelen, C. meg se próbálja)

- Euler, 1746: táblázatok; Clairaut, D'Alembert, 1747: saját megoldásaik
- A Hold apogeumának számított mozgása csak kb. fele az észlelt adatnak
  - Clairaut: módosítja a gravitációs törvényt ($\mu \cdot r^2 + \nu \cdot r^4$ → kb. stimmel)
  - D'Alembert a mágnesességre fogja, Euler is próbálkozik mindennel
- 1749: Clairaut rálel a megoldásra: amit az elején lényegtelenként elhanyagol (köbös tagok), az később fontossá válik
  - Euler kb. ugyanezt kihozza gyorsan, D'Alembert még pontosabbá teszi
  - 1752, Clairaut: *Théorie de la Lune* → új táblázatok
- D'Alembert: 1754: *Recherches sur différents points importants du système du Monde*
  + 1756: saját táblázatok + későbbi további pontosítások
- Euler: 1753: *Theoria motuum Lunae*
  - a függelék tartalmazza először az állandók variálásának módszerét
  - erre alapozza Thobias Mayer saját táblázatait
  - 1772: új, még pontosabb megoldás
- Clairaut táblázatai a legpontosabbak ((1,5' → a f. hosszúság 3/4° pontos), mert erősen használja Lacaille észleléseit, de Euler elméleti megoldása a legáltalánosabb és később ebből lépnek tovább

A Hold középmozgásának szekuláris gyorsulása:

- CDE ezt ismerte, de nem tudta megmagyarázni → fontos probléma
- Lagrange: 1774-ben próbálja megmagyarázni
  ↔ nem megy: kétségbe vonja a jelenséget kimutató észlelési adatokat
- Laplace:
  - próbálja a gravitáció véges terjedési sebességével magyarázni, sikertelenül
  - 1787: közvetett hatás: a bolygók perturbálják a földpálya excentricitását, és ez gyorsítja lassan a hónapokat:
    - kb. 100 év alatt 10”-nyivel előrébb csúszik (?)
    - ez csak egy ideig van, aztán az excentricitás ismét nőni fog, és a szekuláris gyorsulás negatívvá válik
    - ez jól magyarázza az addigi észleléseket
    - (100 évvel a Principia után az utolsó ismert szabálytalanság is magyarázatra lel)
  - (de John Couch Adams (1819-92): Laplace túl sok paramétert elhanyagolt → a valódi mérték kisebb a nála számoltnál (5-6”/100 év) → Delaunay megerősíti, és arra vezeti vissza, hogy a Föld forgása lassul a gravitációs árapály miatt (Kant))

Periodikus és szekuláris perturbáció

- periodikus: a perturbáló test periódusához valamilyen módon igazodva)
- szekuláris: állandó (pl. szek. gyors., a földpálya apszispontjainak mozgása (→ később: ezek is periodikusak, csak sokkal hosszabb távon)

- különbséget Euler is észreveszi, de az utóbbiak kezelésére Lagrange ad eszközöket: szétválasztható, hogy
  - periodikus: a szóban forgó égitestek pályaelemeitől *és* pozícióitól egyszerre függenek (az utóbbi ciklikusan változó hatást eredményez),
  - szekuláris: csak a pályaelemektől függenek (így a hatás állandó)

„Valójában a szekuláris egyenetlenségek nem mások, mint amik visszamaradnak azután, hogy (általában) sokkal nagyobb mennyiségek kölcsönösen kioltják egymást periodikus jelleggel… Ám ezek természetüket tekintve múlandók és ideiglenesek, és rövid idő alatt nyom nélkül eltűnnek. A bolygót időlegesen elhúzza valami a pályájáról (mármint a lassan változó pályájáról), aztán visszakényszeríti rá és eltéríti ugyanannyira a másik irányba is, így a változások összeadódnak és a mindkét oldali kitérések átlagához tartanak.”

John Herschel
(1792-1871)

Eredmények: a bolygók mozgása – CDE

- Ismert szabálytalanságok:
  - a földpálya apszispontjai (perihélium és aphélium) előre haladnak
  - az ekliptika hajlása (a földtengelyhez képest) nagyon lassan csökken
  - Halley: a Jupiter és Szaturnusz mozgásában kölcsönös zavarok
- Megoldások – CDE:
  - mindhárman vizsgálják, hogyan befolyásolja a Hold a Föld pályáját
  - mindhárman próbálkoznak a Nap-Jupiter-Szaturnusz hármassal
  - Clairaut, 1757: : a Hold és a Vénusz hatása a Föld mozgására (→ az első, perturbációs hatásokra alapozott tömegbecslések: a Hold 1/67 [1/81], a Vénusz 2/3 [0,82] M_F)
  - Euler kiszámítja, hogy
    - a földpálya apszisvonala kb. 13”-et halad előre évente
    - az ekliptika hajlása 48”-et csökken évente
    - addig még ismeretlen (nem kimért) szabálytalanságok létét előrejelzi

Pályaelemek bolygókra

Az alábbi paraméterek határozzák meg teljesen egy bolygó mozgását:

Pálya mérete, alakja:

- *a*: ellipszis fél nagytengelyének hossza
- *e*: ellipszis excentricitása

Pálya elhelyezkedése a síkban:

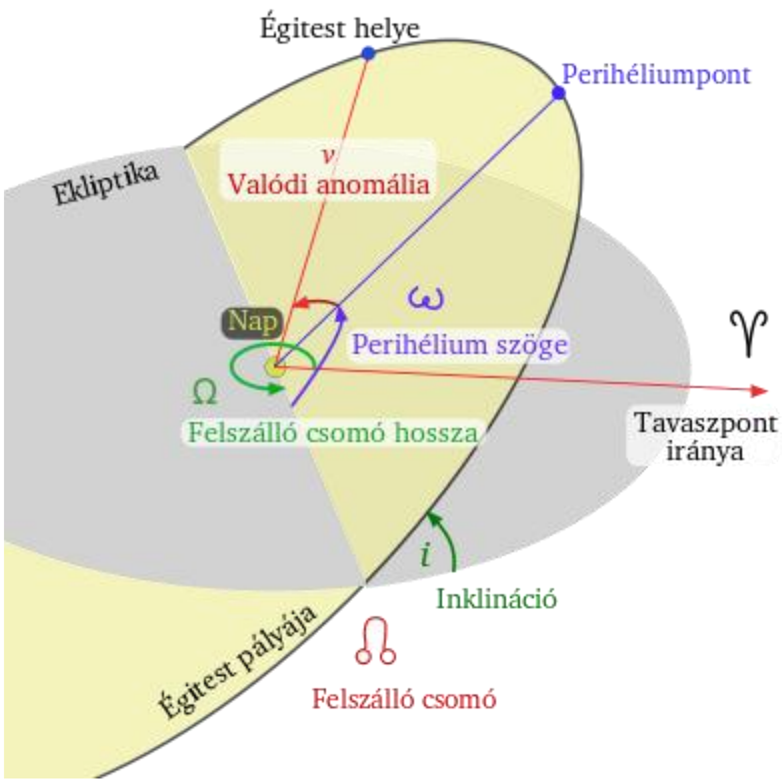
- ω: a perihélium (napközeli) pont iránya

Pálya elhelyezkedése a térben:

- *i*: inklináció – a pálya hajlása az ekliptikához
- Ω: a felszálló csomó hossza – a pályasík és az ekliptika metszésvonalának iránya

Az égitest helye a pályán:

- T_0: egy perihélium-átmenet időpontja



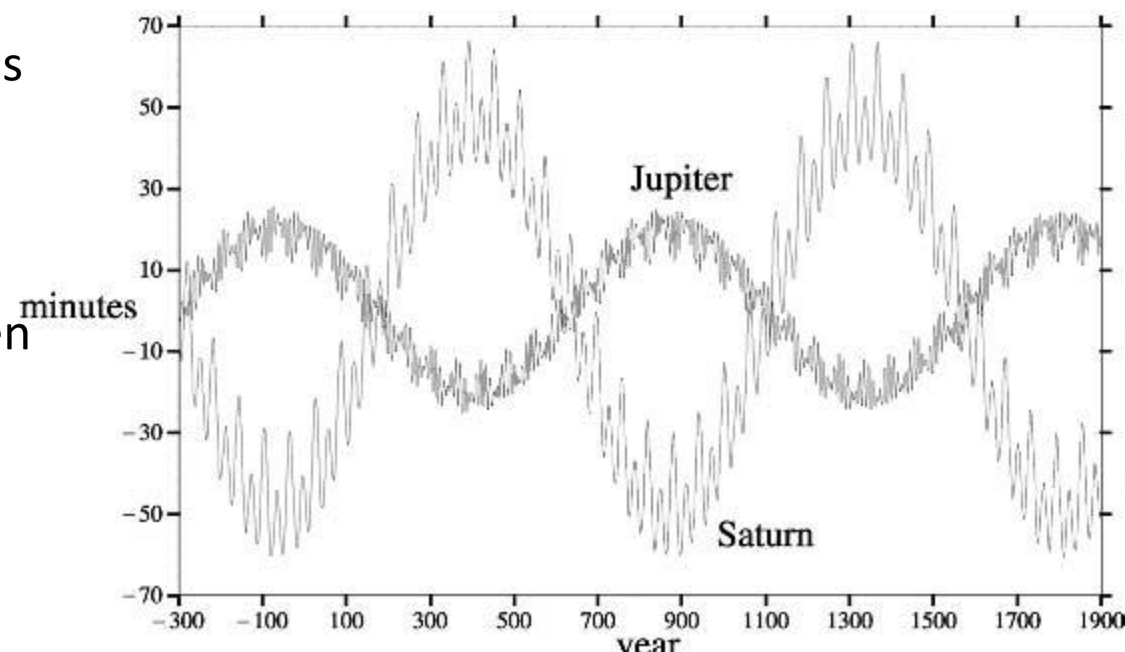
(Megj.: az első 3-ban lehetnek szekuláris változások is, a többiben csak per.)

Eredmények: a bolygók mozgása – L^2

- Fő megoldatlan probléma: Jupiter és Szaturnusz egymásra hatásai (Halley)
- Lagrange, 1776: ha két bolygó periódusa (nem túl nagy) egész számok szerint aránylik, akkor a periodikus hatások szekuláris effektusokat eredményeznek – de ilyen nincs a Naprendszerben (szerinte)
  DE: ha csak majdnem arányosak, akkor nagyon hosszú periódusú szabálytalanságok lesznek
- márpedig $P_S/P_J = 5/2$ (elég jó közelítéssel)

  → Laplace: 900 éves periódus
  → a hatás nem szekuláris

- 1773 és 84 között a L^2 páros szoros kapcsolatban áll és ezen az elméleten dolgozik



Eredmények:

- az excentricitás és inklináció csak bizonyos értékek között változhat
- egyes bolygók pályaelemei közti összefüggések (Laplace):

$$\sum_i M_i \cdot \sqrt{a} \cdot e^2 \quad \text{és} \quad \sum_i M_i \cdot \sqrt{a} \cdot \tan^2 i$$ a Naprendszer egészére állandó

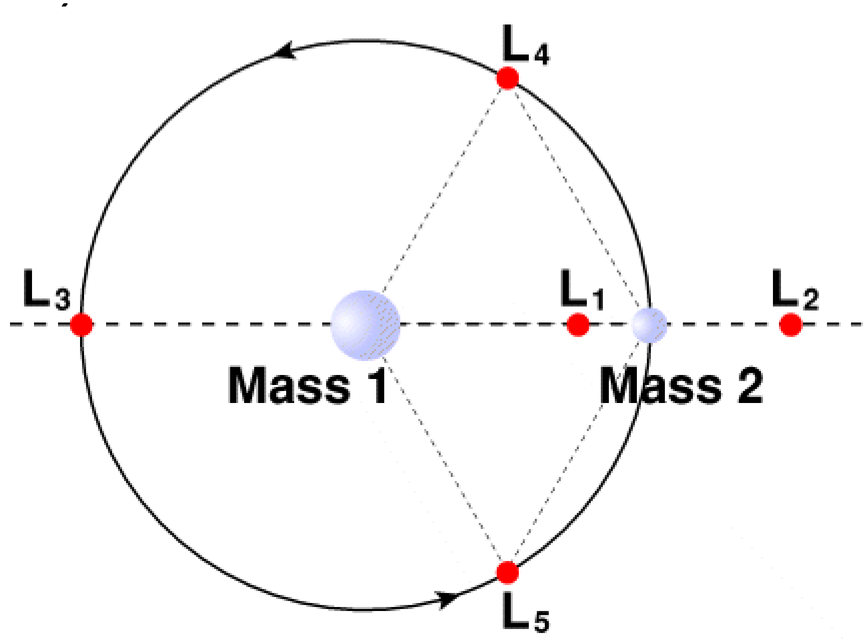
  - van egy excentricitás és inklináció-készlet a Naprendszerben
  - az egyes bolygókra tipikusan elég kicsi az *e* és *i* értéke
  - így egy bolygónál se válhatnak túl naggyá (és főleg a Jupiter és a Szaturnusz viszi el a nagy részét, tömegük és nagy távolságuk miatt)

    → ez biztosítja, hogy nem lehet olyan bolygó, ami a többivel ellentétes irányban kering

- az első 3 pályaelem mind bizonyos állandó határok közé van szorítva; vannak gyors (periodikus) és lassú (szekuláris) változások
- Laplace: ez magyarázat a Naprendszer stabilitására (de persze mindig sorfejtések vannak → nem tökéletes eredmény)

Lagrange-pontok

- A háromtest-probléma bizonyos speciális esetekben egzaktul megoldh (két nagy + egy kicsi test)
- Az L-pontokon kvázi stabilan képes elhelyezkedni a kicsi test (körülöttük kering)
- Ennek vannak természetes (kisbolygók, törmelékholdak) és mesterséges (műholdak, űrszondák) megvalósulásai



Néhány egyéb eredmény (Laplace)

- holdak: főleg a Jupiter-holdak mozgása
- a Szaturnusz gyűrűje nem lehet merev test
- precesszió, nutáció (D'Alembert-énél) átfogóbb tárgyalása, hasonló szabálytalanságok a Holdra és a Szaturnusz-gyűrűre
- Föld alakja: Clairaut-énál jobb elméleti megoldás (de nem sokkal pontosabb)
- árapály egyre jobb magyarázata (bár a megfigyelésekkel még mindig nem teljesen passzol)
- perturbációs elmélet alkalmazása az üstökösökre
- a perturbáció mértéke alapján égitestek tömege becsülhető: Mars, Vénusz, Jupiter-holdak + a már ismert adatok is pontosodnak (kivéve: Merkúr – nincs számottevő pert. hatása – 1842-ig: akkor egy üstökös)

$\Rightarrow$ a 19. század indulásával a Naprendszermegfigyelt mozgásai kielégítően magyarázhatók, előrejelezhetők

Függelék: Laplace köde

- (hasonló, de valszeg független: Kant, 1755)
- *Exposition du système du monde*, 1796:
  - az összes bolygó (7) és az összes ismert hold (14) egy irányba kering (megj.: az Uránusz holdjai pont nem, de ez ekkor még bizonytalan, és L. nem nagyon veszi figyelembe a kétségeket)
  - a Nap, a bolygók és a (nem kötött) holdak is erre forognak nagyjából minden tengely egy felé mutat
  - és minden mozgás közelít a körhöz (kicsi *e*) és az egy síkhoz (kicsi *i*)

$\Rightarrow$ a Naprendszer egy hatalmas forgó ködből kondenzálódott ki

  - (kivételek: üstökösök (nagy pályahajlás és excentricitás) és a közben felfedezett kisbolygók (átmeneti a bolygók és az üstökösök között))

- Herschell: több száz örvénylő ködkorongot fedez fel, ráadásul különböző fejlődési szakaszokat mutatnak: a struktúrálatlan ködtől a középütt kondenzálódott felhőn át (planetáris köd) a halmazszerű objektumokig
- → Laplace:
  így jön létre minden Naprendszer: a forgó ködkorong gravitációs kondenzáció során gyűrűket dob le magáról, ebből lesznek a bolygók
- ↔ nincs hozzá matematikai modell:

„ezek csak felvetések a csillagok és a Naprendszer keletkezésével kapcsolatban, melyeket mindazzal a bizalmatlansággal mutatok be, amit azoknak a dolgoknak kell kiváltaniuk, melyeket nem megfigyelés és számítás eredményeiként kaptunk”

- Hiszen az elméleti csillagászat *nem más*, mint differenciálegyenletek felírása és megoldása