

George Boolos: Gödel második nemteljességi tételének igen rövid magyarázata

(in: *Mind* 103 (1994): 1-3.)

Először is, „bizonyítotttnak lenni” számomra azt jelenti, hogy „bizonyítotttnak lenni a matematika egésze által”. Mint jól tudjuk, kettő meg kettő az négy. És természetesen *bizonyítható*, hogy kettő meg kettő az négy (vagyis bizonyítható a matematika egésze által, habár a kettő meg kettő esetében persze nincs szükség a matematika *egészére* annak bizonyításához, hogy az négy). Talán ez már nem annyira világos, de az is bizonyítható, hogy bizonyítható, hogy kettő meg kettő az négy. És az is bizonyítható, hogy bizonyítható, hogy bizonyítható, hogy kettő meg kettő az négy. És így tovább. A helyzet az, hogy ha egy állítás bizonyítható, akkor az is bizonyítható, hogy az állítás bizonyítható. És még *ez* is bizonyítható.

Kettő meg kettő az nem öt. És bizonyítható, hogy kettő meg kettő az nem öt. És bizonyítható, hogy bizonyítható, hogy kettő meg kettő az nem öt, és így tovább.

Így tehát: bizonyítható, hogy kettő meg kettő az nem öt. Vajon bizonyítható az is, hogy kettő meg kettő *az* öt? Hogy finomak legyünk, nagy csapás lenne a matematikára nézve, ha ez bizonyítható volna. Ha bizonyítható volna, hogy kettő meg kettő az öt, akkor az is bizonyítható volna, hogy az öt az nem öt, és akkor nem létezne *egyetlen* olyan állítás sem, amelyik *ne* volna bizonyítható, vagyis a matematika egy rakás sületlenség volna.

Ezért akarjuk megkérdezni: *bizonyítható-e*, hogy nem bizonyítható, hogy kettő meg kettő az öt? Merő döbbenet: nem bizonyítható! Pontosabban: *ha* bizonyítható, hogy nem bizonyítható, hogy kettő meg kettő az öt, *akkor* az is bizonyítható, hogy kettő meg kettő az öt, és ekkor a matematika nem más, mint egy rakás sületlenség. Valójában ha a matematika nem egy rakás sületlenség, akkor nem bizonyítható egyetlen olyan formájú állítás sem, hogy „az *X* állítás nem bizonyítható”.

Vagyis amennyiben a matematika nem egy rakás sületlenség, úgy, bár az nem bizonyítható, hogy kettő meg kettő az öt, de az sem bizonyítható, *hogy* nem bizonyítható, hogy kettő meg kettő az öt.

Mellesleg ha már itt tartunk, akkor elárulom: igen, *bizonyítható*, hogy ha bizonyítható, hogy nem bizonyítható, hogy kettő meg kettő az öt, akkor bizonyítható, hogy kettő meg kettő az öt.

„Bárcsak megmagyarázná ezt a magyarázatot!”

Ha a matematika egésze formalizálható egy szokásos felépítésű formális elméletben, mint ahogy azt fel fogjuk tenni (bár ez nem kis feltevés), akkor létezik a (z elmélethez tartozó) nyelvben egy olyan, az elmélet („mint” formális elmélet) megfelelő leírásából nyerhető formula: $\text{Proof}(x, y)$, amelyik teljesíti e három feltételt:

- (i) $ha \vdash p, akkor \vdash \Box p$,
- (ii) $\vdash (\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))$, és
- (iii) $\vdash (\Box p \rightarrow \Box \Box p)$

a nyelv minden p, q mondatára. A „ $\Box p$ ” azt rövidíti, hogy $\exists x \text{Proof}(x, \lceil p \rceil)$, ahol $\lceil p \rceil$ a p mondat egy standard reprezentációja a nyelvben. ($\lceil p \rceil$ lehet például a p mondat Gödel-számának számjegye.) „ \vdash ” azt jelenti (a mi nyelvünkben), hogy ami utána következik, az „az elméletben bizonyítható”. „ $\text{Proof}(x, y)$ ” egy olyan (az elmélet nyelvén kifejezett) formulát jelöl (a mi nyelvünkben), amelynek előállítására megfelel a „... bizonyítása $_$ -nak az elméletben” bármely standard definíciójának. Ezért a nyelv akármelyik p mondatához tartozik

a nyelvben egy $\Box p$ mondat, mely tulajdonképpen azt mondja ki, hogy a p az elméleten belül bizonyítható.

Az (i), (ii) és (iii) feltételeket Hilbert-Bernays-Löb-féle levezethetőségi feltételeknek nevezik; minden olyan ésszerű formális elmélet teljesíti őket, amelyekben az aritmetika egy bizonyos kis része bizonyítható.

Mínthogy az elmélet standard, benne a nyelvének minden tautológiája bizonyítható, valamint a bizonyítható kijelentések minden logikai következménye is bizonyítható.

Ebből következik, hogy minden p, q mondatra

(iv) ha $\vdash (p \rightarrow q)$, akkor $\vdash (\Box p \rightarrow \Box q)$.

Ugyanis: ha $\vdash (p \rightarrow q)$, akkor (i) alapján $\vdash \Box(p \rightarrow q)$; de (ii) szerint $\vdash (\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))$, tehát a modus ponens alkalmazásával $\vdash (\Box p \rightarrow \Box q)$.

\perp az a nullaargumentumú igazságfüggvény, amelyik minden kiértékelés mellett hamis. Természetesen \perp egy ellentmondás. Később majd észre kell vennünk, hogy $(\neg q \rightarrow (q \rightarrow \perp))$ egy tautológia. Ha \perp nem tartozik a nyelv primitív szimbólumai közé, akkor bármely elvetendő mondattal definiálhatjuk, például azzal, amelyik kifejezi, hogy kettő meg kettő az öt.

\perp segítségével könnyen kifejezhetjük az elmélet konzisztenciáját: $\not\vdash \perp$, azaz \perp nem bizonyítható az elméletben. A nyelv azon mondata, amelyik az elmélet konzisztenciáját állítja, $\neg \Box \perp$ alakúnak vehető, mely azonos azzal, hogy $\neg \exists x \text{Proof}(x, \ulcorner \perp \urcorner)$.

Immár bebizonyíthatjuk Gödel második nemteljességi tételét, amely azt állítja, hogy amennyiben az elmélet konzisztens, úgy a nyelv azon mondata, amelyik az elmélet konzisztenciáját állítja, nem bizonyítható az elméletben – csakúgy, mint azt a tételt, mely szerint a második nemteljességi tétel bizonyítható az elméletben („formalizált második nemteljességi tétel”).

A diagonalizálási eljárás segítségével, melyet Gödel vezetett be „A formálisan eldönthetetlen kijelentésekről...” című írásában, található egy olyan p mondat, amelyik ekvivalens az elméletben azzal a kijelentéssel, hogy p bizonyíthatatlan az elméletben, vagyis egy olyan mondat, hogy

- | | | |
|-----|---|---|
| 1. | $\vdash p \leftrightarrow \neg \Box p$ | |
| 2. | $\vdash p \rightarrow \neg \Box p$ | 1-ből igazságfüggvény szerint |
| 3. | $\vdash \Box p \rightarrow \Box \neg \Box p$ | 2-ből (iv) alapján |
| 4. | $\vdash \Box p \rightarrow \Box \Box p$ | (iii) alapján |
| 5. | $\vdash \neg \Box p \rightarrow (\Box p \rightarrow \perp)$ | tautológia |
| 6. | $\vdash \Box \neg \Box p \rightarrow \Box (\Box p \rightarrow \perp)$ | 5-ből (iv) alapján |
| 7. | $\vdash \Box (\Box p \rightarrow \perp) \rightarrow (\Box \Box p \rightarrow \Box \perp)$ | (ii) alapján |
| 8. | $\vdash \Box p \rightarrow \Box \perp$ | 3, 6, 7, és 4-ből igazságfüggvény szerint |
| 9. | $\vdash \neg \Box \perp \rightarrow p$ | 8 és 1-ből igazságfüggvény szerint |
| 10. | $\vdash \Box \neg \Box \perp \rightarrow \Box p$ | 9-ből (iv) alapján |
| 11. | $\vdash \neg \Box \perp \rightarrow \neg \Box \neg \Box \perp$ | 8 és 10-ből igazságfüggvény szerint. |

(Mindvégig elhagytuk a legkülső zárójeleket.)

Így ha $\vdash \neg \Box \perp$, akkor mind $\vdash \neg \Box \neg \Box \perp$, mind (11), és (i) alapján $\vdash \Box \neg \Box \perp$, ahonnan, a propozicionális kalkulus alapján, $\vdash \perp$. Tehát ha $\not\vdash \perp$, akkor $\not\vdash \neg \Box \perp$.